

이 결과는 주기가 다른 여러 주기 신호의 선형 결합으로 주어지는 주기 신호의 푸리에 급수 표현을 구할 때 활용할 수 있다.

■ 예제 C7-3 : 푸리에 급수의 주기 변화 성질의 활용

(책)[예제 7-1]의 신호  $x(t) = 2\cos(8\pi t - 72^\circ) + 4\cos(10\pi t - 90^\circ)$ 의 푸리에 급수를 구하라.

<풀이>

$s(t) = \cos(8\pi t - 72^\circ)$ 는 기본 주파수가  $\omega_1 = 8\pi$ , 즉 주기가  $T_1 = 1/4$ 이고 기본파만 존재하는 주기 신호이다. 그리고  $v(t) = \cos(10\pi t - 90^\circ)$ 는 기본 주파수가  $\omega_2 = 10\pi$ , 즉 주기가  $T_2 = 1/5$ 이고 역시 기본파만 존재하는 주기 신호이다. 오일러 공식을 이용하여 두 신호를 각각 푸리에 급수로 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{5}}e^{j8\pi t} + \frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{5}}e^{-j8\pi t} = S_1e^{j\omega_1 t} + S_{-1}e^{-j\omega_1 t} \\ v(t) &= \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{j10\pi t} + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{-j10\pi t} = V_1e^{j\omega_2 t} + V_{-1}e^{-j\omega_2 t} \end{aligned}$$

두 주기 신호  $s(t)$ 와  $v(t)$ 의 선형 결합으로 주어지는  $x(t) = 2s(t) + 4v(t)$ 는 주기가 두 신호의 주기의 최소공배수인  $T = 1$ , 즉 기본 주파수가  $\omega_0 = 2\pi$ 인 주기 신호가 된다.  $T = 1$ 이면,  $s(t)$ 는 주기가 4배,  $v(t)$ 는 주기가 5배 늘어난 것과 같다. 따라서 식 (C7.29)에 의해  $X_{\pm 4} = 2S_{\pm 1}$ ,  $X_{\pm 5} = 4V_{\pm 1}$ 이 된다. 그리고 선형성을 적용하면  $x(t)$ 의 푸리에 급수는 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} x(t) &= X_{-5}e^{-j5\omega_0 t} + X_{-4}e^{-j4\omega_0 t} + X_4e^{j4\omega_0 t} + X_5e^{j5\omega_0 t} \\ &= 2e^{j\frac{\pi}{2}}e^{-j5\omega_0 t} + e^{j\frac{2\pi}{5}}e^{-j4\omega_0 t} + e^{-j\frac{2\pi}{5}}e^{j4\omega_0 t} + 2e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{j5\omega_0 t} \end{aligned}$$

따라서 푸리에 계수는 다음의 네 경우만 값을 가지고 나머지는 모두 0이 된다. 이는 (책)[예제 7-1]의 (책)[그림 7-4]에서 확인할 수 있다.

$$X_{-4} = e^{j\frac{2\pi}{5}}, \quad X_4 = e^{-j\frac{2\pi}{5}}, \quad X_{-5} = 2e^{j\frac{\pi}{2}}, \quad X_5 = 2e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

오일러 공식을 이용하여  $x(t)$ 를 직접 푸리에 급수로 나타내도 같은 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} x(t) &= (e^{j(8\pi t - 72^\circ)} + e^{-j(8\pi t - 72^\circ)}) + 2(e^{j(10\pi t - 90^\circ)} + e^{-j(10\pi t - 90^\circ)}) \\ &= e^{-j\frac{2\pi}{5}}e^{j4\omega_0 t} + e^{j\frac{2\pi}{5}}e^{-j4\omega_0 t} + 2e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{j5\omega_0 t} + 2e^{j\frac{\pi}{2}}e^{-j5\omega_0 t} \end{aligned}$$

이 경우에는  $x(t)$ 가 정현파들로만 이루어진 간단한 주기 신호이므로 직접 푸리에 급수로 전