

연속 신호의 디지털 처리

책의 ‘1절 개요’와 관련하여 그림 4.1의 디지털 처리 시스템의 구성부 중에서 디지털 시스템에 대한 설명을 추가하였고, 후처리 필터의 명칭과 기능에 대해 설명을 덧붙였다.

책의 ‘2절 샘플링’과 관련하여 샘플링의 기능과 그로 인해 야기되는 문제들에 대한 설명을 보충하고, 샘플링의 임펄스 변조 모델의 결과 유도에 대한 다른 접근 방법을 보였다.

책의 ‘3절 주파수 중첩’과 관련하여 상세한 설명과 함께 (협의의) 주파수 중첩과 주파수 꺾기의 차이를 명확히 알 수 있도록 하였으며, 이해를 도울 수 있는 예제들을 추가로 제시하였다.

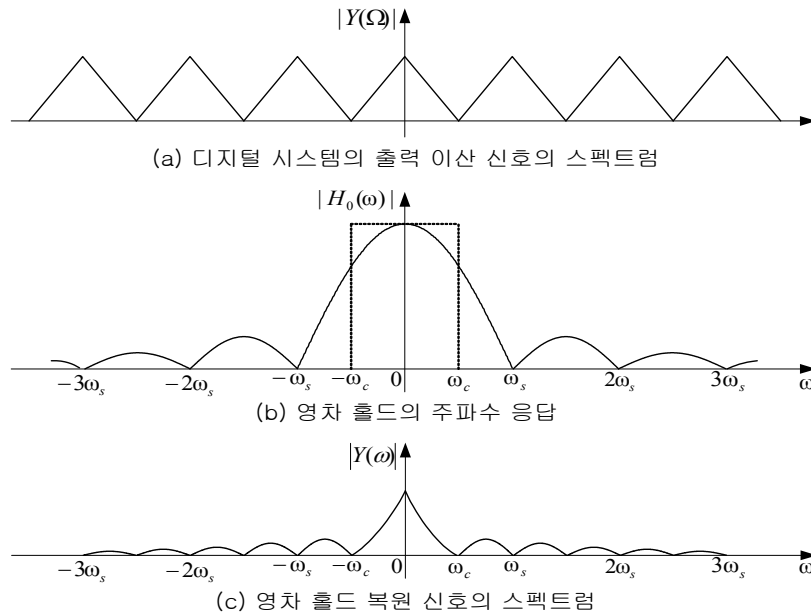
책의 ‘4절 신호의 복원’과 관련해서는 영차 홀드를 이용한 복원시 생기는 문제점을 주파수 스펙트럼의 관점에서 상세히 설명하였다.

마지막으로 책의 ‘5절 A/D 변환과 D/A 변환’ 부분에 대해서는 부호화와 복호화에 대한 간단한 예제를 추가하였다.

이를 통해 샘플링 주파수와 주파수 중첩 및 복원 신호 사이의 관계에 대해 보다 잘 이해할 수 있을 것이다.

4.1 연속 신호의 디지털 처리 시스템

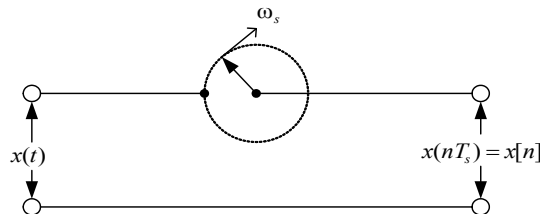
후처리 필터는 영차 홀드를 이용해 복원된 연속 신호에 남아있는 고주파 성분을 제거한다. [그림 C4-1]에서 보면, 영차 홀드의 주파수 응답의 부엽^{side lobe}에 의해 (a)의 (샘플링 주파수 정수배에 위치한) 기저 대역 스펙트럼의 측대역 허상들이 (c)와 같이 완전히 제거되지 않는다. 이를 제거하여 파형을 평활화하므로 허상 제거^{anti-imaging} 또는 평활화 필터라고 한다. 후처리 필터 역시 전처리 필터와 마찬가지로 저역 통과 필터이다.



[그림 C4-1] 영차 홀드 복원 신호의 고주파 성분 허상

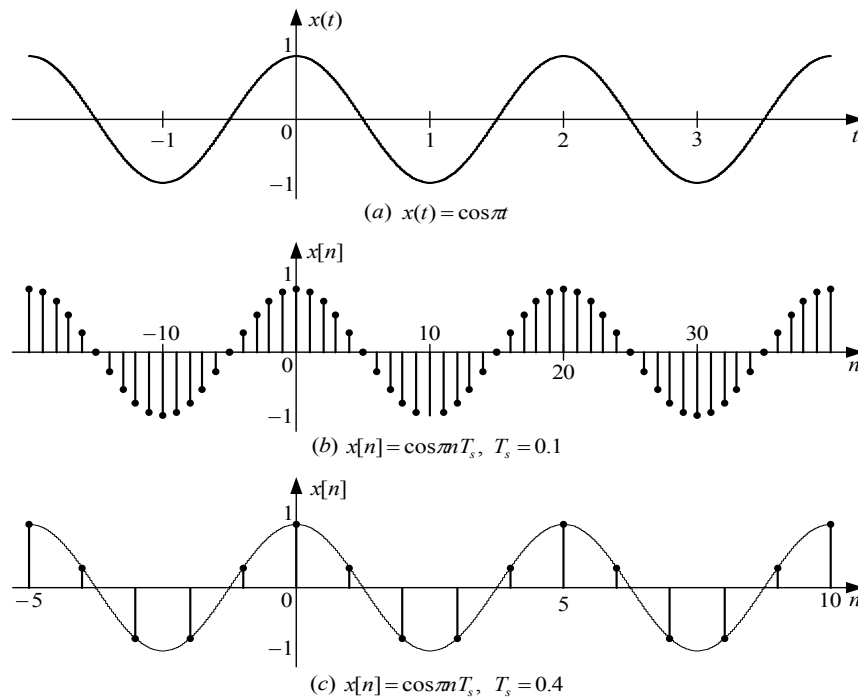
4.2 샘플링

샘플링은 [그림 C4-2]와 같이 입력이 연속 신호 $x(t)$ 이고 출력이 이산 신호 $x[n]$ 인 일종의 회전 스위치로 생각할 수 있다. 각속도 ω_s 로 회전하는 회전 스위치는 한 바퀴 돌 때마다 한 번씩 즉, 매 $T_s = 2\pi/\omega_s$ 초마다 스위치를 닫으며, 이때마다 그 순간의 입력 신호 값이 샘플링되어 출력 단자에 나타나게 된다.



[그림 C4-2] 이상적인 샘플링 모델

[그림 C4-3]에 정현파 $x(t) = \cos\pi t$ 를 샘플링 주기를 각각 0.1[sec], 0.4[sec]로 하여 샘플링한 예를 보였다.



[그림 C4-3] 정현파 신호와 이를 샘플링한 이산 신호

그림 (b)의 이산 신호는 $T_s = 0.1$ [sec], 즉 $f_s = 1/T_s = 10$ [samples/sec]로 한 주기에 20개의 샘플을 가지며, (c)의 이산 신호는 $T_s = 0.4$ [sec], 즉 $f_s = 2.5$ [samples/sec]이므로 한 주기에 5개의 샘플을 가진다.

그림을 보면, (b)의 경우는 이산 신호로부터 샘플링하기 전의 연속 신호 파형이 정현파라는 것을 대략 눈짐작할 수 있지만, (c)의 경우에는 샘플링된 이산 신호만 보아서는 원래의 정현파 모양을 찾아내기조차 쉽지 않다. 그런데 (b)의 경우라 할지라도 샘플들을 매끈하게 아주 잘 연결하여 얻은 정현파 신호가 샘플링이 수행되기 전의 원래의 연속 신호라고 확실하게 말할 수 없다. 왜냐하면 이산 신호는 단순히 값들이 순서대로 나열된 수열일 뿐으로 샘플링 과정에서 연속 신호에 있던 샘플들 사이의 신호 정보를 잃어버린 데다가 샘플링 주기에 대한 정보도 전혀 포함하고 있지 않기 때문이다((b)와 (c) 모두 가로축이 시간이 아닌 발생 순서만 표시하고 있다).

따라서 신호를 복원할 때 골치 아픈 문제가 생기게 된다. (책)[그림 4-3]의 경우에는 그나마 샘플링 주기에 대한 정보가 주어진다면 어떤 주파수의 연속 정현파로 복원할지 결정할 수 있으나, (책)[그림 4-4]의 경우는 샘플링 주기가 동일하기 때문에 그조차 불가능해진다.

샘플링의 임펄스 샘플링 모델에서 얻은 결과인 (책)식 (4.9)는 책에서 제시한 것과 다른 방법으로 유도할 수 있다.

임펄스 신호의 Fourier 급수 전개에 의한 Fourier 계수는 다음과 같고

$$X_k = \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} \delta(t) e^{-jk\omega_s t} dt = \frac{1}{T_s} \quad (\text{C4-1})$$

주기 신호 $x_{T_s}(s)$ 의 푸리에 변환은 다음과 같이 되므로

$$X_{T_s}(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(\omega - k\omega_s) \quad (\text{C4-2})$$

(책)식 (4.5)로 표현된 임펄스 열의 Fourier 변환은

$$P(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_s} \delta(\omega - k\omega_s) = \omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \quad (\text{C4-3})$$

(책)식 (4.6)의 임펄스 열 변조 모델은 주파수 영역에서 푸리에 변환의 성질에 의해 두 신호의 스펙트럼의 컨벌루션이 되므로, 샘플링 결과 얻어진 신호의 스펙트럼은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} X_s(\omega) &= \frac{1}{2\pi} X(\omega) * P(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega) * \delta(\omega - k\omega_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s) \end{aligned} \quad (\text{C4-4})$$

4.3 주파수 중첩(Aliasing)

새년의 샘플링 정리는 연속 신호에 대해 나이퀴스트 샘플링 주파수 이상으로 샘플링하게 되면 원래 신호의 복원이 가능하다고 말하고 있다. 이 조건을 정현파에 적용해보면 **한 주기에 2개 이상의 샘플을 취하면 원래 정현파를 복원할 수 있다**는 얘기가 된다. 샘플링 주기에 서 규정하는 충분한 빠르기로 샘플링을 하지 않으면 어떤 일이 생길까?

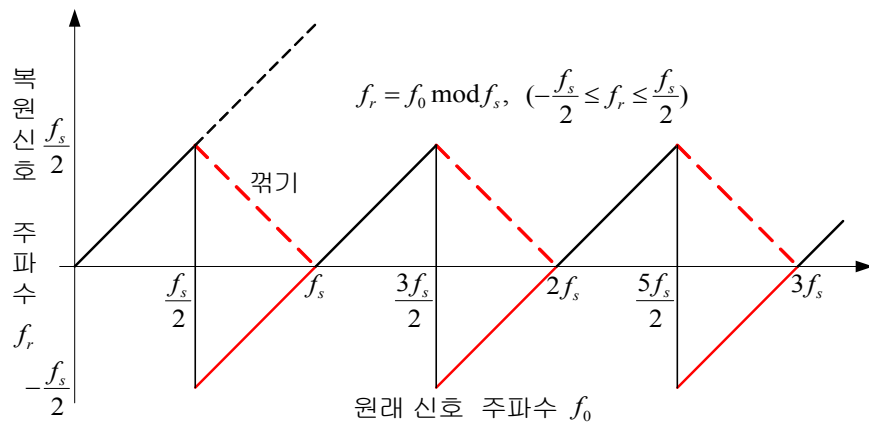
1절에서 보았듯이, 주파수가 $f_0 + lf_s$ 인 정현파를 샘플링 주파수 f_s 로 샘플링하면 모두 같은 이산 신호를 얻게 된다. 이는 거꾸로 하나의 이산 정현파 신호로부터 되돌아갈 수 있는 연속 정현파가 무수히 많다는 얘기가 된다. 그런데 (책)그림 4.4에서 보듯이, 샘플링 주파수 f_s 로 샘플링을 하게 되면 원래 신호의 스펙트럼이 f_s 의 정수배마다 반복하여 나타나기 때문에, 저역 통과(LP) 필터를 이용하여 기저 대역에 있는 주파수가 가장 낮은 스펙트럼만 뽑아내는 것이 샘플링 정리에서 제시하는 신호의 복원 원리이다.

그러므로, 주파수 f_0 인 정현파를 샘플링 주파수 f_s 로 샘플링을 할 때 과연 어떤 주파수가 가장 낮은 주파수에 해당되는지 차근차근 따져보기로 하자.

먼저 샘플링 정리를 만족하는 경우($f_s \geq 2f_0$)를 살펴보자. $f_0 \leq f_s/2$ 이므로 $|f_0 + lf_s| \geq f_0$ ($l = \dots -1, 0, 1 \dots$)가 되어 가장 낮은 주파수는 f_0 가 된다. 그러므로 LP 필터로 복원되는 정현파는 주파수가 f_0 인 원래의 정현파이다.

다음으로 샘플링 정리를 만족시키지 못하는 경우 중에서 $f_s/2 \leq f_0 \leq f_s$ 일 때를 살펴보자. alias 중에 $f_0 - f_s$ ($|f_0 - f_s| \leq f_s/2 \leq f_0$)가 기저 대역 내의 가장 낮은 주파수가 되므로 LP 필터를 이용하여 하나의 정현파만 뽑아내면 음의 주파수 $f_0 - f_s$ 를 갖는 정현파로 복원이 될 것이다. 그런데 물리적으로 음의 주파수는 없으므로, $\cos(-\theta) = \cos\theta$, $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ 에 의해 실제로는 $f_s - f_0$ 의 주파수를 갖는 정현파로 복원이 될 것이다(단 사인파는 부호가 바뀐다).

원래 신호의 주파수와 복원되는 신호의 주파수 관계를 그래프로 그려보면, 그림 C4-4에 나타난 것처럼 $0 \leq f_0 \leq f_s/2$ 구간에서는 복원 신호의 주파수 f_r 가 그대로 f_0 이 되지만, $f_s/2 \leq f_0 \leq f_s$ 구간에서는 복원 신호의 주파수는 $f_0 - f_s$ 로서 음인테도 붉은 점선으로 나타난 것처럼 양의 주파수 $f_s - f_0$ 로 복원된다. 그런데 이것은 원래 신호의 주파수 f_0 선을 $f_s/2$ 에서 꺾어서 접은 것과 같다. 그러므로 이를 주파수 꺾기^{frequency folding}라고 한다. **주파수 꺾기는 음의 주파수를 갖는 alias에 의한 주파수 중첩 현상으로서 위상 반전이 발생한다.**



[그림 C4-4] 주파수 중첩과 꺾기

$f_0 \geq f_s$ 의 경우에는 $|f_0 - lf_s| (\leq f_s/2)$ 를 만족하는 $f_0 - lf_s$ 가 기저 대역에 놓이는 가장 낮은 주파수의 alias이므로 이 정현파로 복원된다. 따라서 그림에서 보듯이 $f_0 - lf_s$ 가 $f_s/2$ 보다 큰지 작은지에 따라 보통의 주파수 중첩과 주파수 꺾기가 교대로 나타난다. 즉 $0 \leq f_0 \leq f_s$ 구간의 패턴이 f_s 주기로 반복된다.

이상의 결과를 정리하면, (책)식 (4.11)과 같이 복원 신호의 주파수 f_r 은 결국 다음과 같이 원래 신호 주파수 f_0 를 샘플링 주파수 f_s 로 나눈 나머지로 수식화되는 것이다.

$$f_r = f_0 \bmod f_s \quad -f_s/2 \leq f_r \leq f_s/2 \quad (\text{책})(4.11)$$

일반적으로 그림 C4-4의 (협의의) 주파수 중첩과 주파수 꺾기를 모두 합하여 넓은 의미로 주파수 중첩 현상이라고 하며, 스펙트럼의 겹침에 의한 신호의 왜곡을 가져온다. 그러나 이를 자세히 분석해보면, 앞의 설명과 같이 두 가지 원인이 작용하는 결과인 것이다. 특히 주파수 꺾기의 경우에는 위상 반전이 발생한다는 사실은 (협의의) 주파수 중첩과는 차이나는 성질로서 주의해야 한다.

(책)식 (4.11)과 [그림 C4-4]에서 알 수 있듯이, **복원 신호의 주파수는 결코 $f_s/2$ 보다 클 수 없다. 그러므로 샘플링 정리에 충실하게 샘플링 주파수를 신호 주파수의 2배 이상으로 선정해야만 주파수 중첩에 의한 혼란을 피하고 원래 신호로 복원할 수 있게 된다.**

■ (책)예제 4.3 보충 설명

신호 $x(t)$ 를 $f_s = 8[\text{Hz}]$ 로 샘플링할 때 복원 신호 $x_r(t)$ 를 구해보자.

각 정현파 성분 중에서 $f_i \leq f_s/2 = 8/2 = 4$ 를 만족하는 것은 $f_1 = 1$, $f_2 = 3$ 뿐이다. 나머지는 $f_{ir} = f_i \bmod f_s$, $-f_s/2 \leq f_{ir} \leq f_s/2$ 으로 복원된다. 각 정현파 성분에 대한 복원 결과의 주파수를 나타내면 다음과 같다.

f_i	1	3	5	7	9
$f_{ir} = f_i \bmod f_s$	1	3	-3	-1	1

따라서 복원 신호는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} x_r(t) &= \sin(2\pi t) + \cos(6\pi t) + \sin(-6\pi t) + \sin(-2\pi t) + \cos(2\pi t) \\ &= \sin(2\pi t) + \cos(6\pi t) - \sin(6\pi t) - \sin(2\pi t) + \cos(2\pi t) \\ &= \cos(2\pi t) + \cos(6\pi t) - \sin(6\pi t) \end{aligned}$$

이번에는 $f_s = 12[\text{Hz}]$ 로 샘플링할 때 복원 신호 $x_r(t)$ 를 구해보자.

각 정현파 성분 중에서 $f_i \leq f_s/2 = 12/2 = 6$ 를 만족하는 것은 $f_1 = 1$, $f_2 = 3$, $f_3 = 5$ 뿐이다. 나머지는 $f_{ir} = f_i \bmod f_s$, $-f_s/2 \leq f_{ir} \leq f_s/2$ 으로 복원된다. 각 정현파 성분에 대한 복원 결과의 주파수를 나타내면 다음과 같다.

f_i	1	3	5	7	9
$f_{ir} = f_i \bmod f_s$	1	3	5	-5	-3

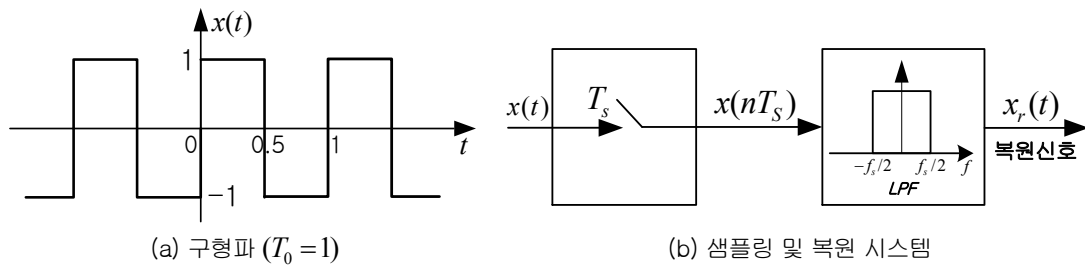
따라서 복원 신호는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 x_r(t) &= \sin(2\pi t) + \cos(6\pi t) + \sin(10\pi t) + \sin(-10\pi t) + \cos(-6\pi t) \\
 &= \sin(2\pi t) + \cos(6\pi t) + \sin(10\pi t) - \sin(10\pi t) + \cos(6\pi t) \\
 &= \sin(2\pi t) + 2\cos(6\pi t)
 \end{aligned}$$

다시 한 번 강조하지만, 사인파의 주파수 꺾기에 의한 복원 신호는 위상 반전이 발생하여 부호가 바뀌게 된다는 것을 주의해야 한다. ■

■ 예제 C4-5 : 사각 펄스 신호의 샘플링과 복원

[그림 C4-5(a)]의 사각 펄스 신호 $x(t)$ 를 (b)에 나타낸 것처럼 샘플링 주파수 f_s 로 샘플링한 뒤 다시 저역 통과 필터로 복원하려고 한다. 샘플링 주파수를 $f_s = 4[\text{Hz}]$, $f_s = 8[\text{Hz}]$ 로 할 경우 복원 신호 $x_r(t)$ 를 구하라.



[그림 C4-5] 사각 펄스 신호의 샘플링 및 복원 시스템

<풀이>

사각 펄스 신호 $x(t)$ 는 주기 $T_0 = 1$ 인 주기 신호이므로 푸리에 급수로 전개하여 정현파들의 일차 결합으로 나타낼 수 있고, 따라서 정현파의 alias와 주파수 중첩에 대해 지금까지 살펴보았던 결과들을 손쉽게 적용할 수 있을 것이다.

그림에서 보듯이 주어진 신호는 기함수 대칭이며 반파 대칭이므로 푸리에 급수로 전개하면 홀수의 sin 항만 존재한다. 즉

$$\begin{aligned}
 x(t) &= b_1 \sin(2\pi t) + b_3 \sin(6\pi t) + \dots + b_m \sin(2m\pi t) + \dots \\
 &= \sum_{m=\text{odd}} b_m \sin(2\pi m t) = \sum_{m=\text{odd}} b_m \cos(2\pi m t - \pi/2)
 \end{aligned} \tag{C4-5}$$

여기서 b_m 은 다음과 같이 구해지는 푸리에 계수이다.

$$b_m = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) \sin(m\pi t) dt = \frac{4}{m\pi}, \quad m = 1, 3, 5, \dots$$

이 사각 펄스 신호는 주파수 $f_1 = f_0$, $f_3 = 3f_0$, $f_5 = 5f_0$, \dots 인 무한개의 주파수 성분을 포함하므로 대역 제한 신호가 아니다. 따라서 샘플링을 하게 되면 무한개의 주파수 성분 때문에 어떤 경우이든 주파수 중첩이 발생하게 될 것이며, 다만 샘플링 주파수를 높임에 따라 중첩되는 영역이 줄어들 것이다.

먼저 샘플링 주파수를 $f_s = 4[\text{Hz}]$ 로 할 경우에 대해서 살펴보자. 식 (C4-5)에서 $f_1 = 1[\text{Hz}]$ 인 기본파만 $f_s \geq 2f_1$ 로 샘플링 정리를 만족시킬 뿐 나머지 모든 고조파들에 대해 샘플링 주파수가 나이퀴스트 샘플링 주파수보다 낮게 된다.

그러므로 샘플링한 이산 신호를 저역 통과 필터로 복원을 하면, 기본파만 그대로 복원되고 모든 고조파들은 $f_s/2$ 보다 낮은 주파수를 갖는 alias들로 복원이 될 것이다. 우선 $3, 7, 11, \dots, -1+4l, \dots$ 고조파들은 $f_{-1+4l} = -1+lf_s$ 을 만족하는 $-f_1 = -1$ 이 최저 주파수의 alias가 되어 주파수 꺾기가 발생하게 된다. 그리고 $5, 9, 13, \dots, 1+4l, \dots$ 고조파들은 $f_{1+4l} = 1+lf_s$ 을 만족하는 $f_1 = 1$ 이 최저 주파수를 갖는 alias가 된다. 따라서 복원 신호는 다음과 같이 된다.

$$x_r(t) = \sum_{l=0}^{\infty} b_{1+4l} \cos(2\pi t - \frac{\pi}{2}) + \sum_{l=0}^{\infty} b_{3+4l} \cos(-2\pi t - \frac{\pi}{2})$$

그런데, 물리적으로 존재하지 않는 음의 주파수 정현파를 삼각함수의 성질을 이용하여 바꾸게 되면 **주파수 꺾기에 해당되는 고조파들에 대해서는 복원 신호의 위상 반전이 이루어져** 복원 신호는 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} x_r(t) &= \sum_{l=0}^{\infty} b_{1+4l} \cos(2\pi t - \frac{\pi}{2}) + \sum_{l=0}^{\infty} b_{3+4l} \cos(2\pi t + \frac{\pi}{2}) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} b_{1+4l} \sin(2\pi t) - \sum_{l=0}^{\infty} b_{3+4l} \sin(2\pi t) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} (b_{1+4l} - b_{3+4l}) \sin(2\pi t) = A \sin(2\pi t) \end{aligned}$$

위 식의 결과는 낮은 샘플링 주파수 때문에 구형파가 정현파로 완전히 왜곡되어 복원이 이루어지는 것을 보여 주고 있다.

위 식의 마지막 등식 관계로부터 직접 복원 신호의 계수 A 를 구할 수도 있지만, 그보다는 각 샘플링 시각에서는 이산 신호와 복원 신호가 같다는 사실, 즉 $x_r(nT_s) = x(nT_s)$ 임을 이용하는 것이 훨씬 간편하다. $T_s = 1/f_s = 1/4$ 이므로 $n = 1$ 을 대입하면 다음의 관계가 성립된다.

$$x_r(1/4) = A \sin(\pi/2) = x(1/4) = 1$$

이를 풀어 $A = 1$ 을 얻고, 따라서 복원 신호 $x_r(t)$ 는 다음과 같이 된다.

$$x_r(t) = \sin(2\pi t)$$

샘플링 주파수를 $f_s = 8[\text{Hz}]$ 로 올리게 되면 결과가 어떻게 달라질까?

이 경우에는 식 (C4-5)의 Fourier 급수 전개 표현에서 $f_s/2 = 4$ 보다 주파수가 낮아서 샘플링 정리를 만족시키는 정현파 성분은 $f_1 = 1$ 인 기본파와 $f_3 = 3$ 인 3고조파 두 개가 된다. 그러므로 저역 통과 필터로 복원을 하게 되면 이 두 정현파 성분만 그대로 복원되고, 이들을 제외한 나머지 고조파들은 주파수 중첩으로 인해 $f_s/2$ 보다 낮은 주파수의 alias들로 복원이 될 것이다.

7, 15, 23, ..., $-1 + 8l$, ... 고조파는 $f_{-1+8l} = -1 + lf_s$ 을 만족하는 $-f_1 = -1$ 이 최저 주파수 alias이고, 5, 13, 21, ..., $-3 + 8l$, ... 고조파는 $f_{-3+8l} = -3 + lf_s$ 을 만족하는 $-f_3 = -3$ 이 최저 주파수 alias가 되어 주파수 꺾기가 발생하게 되므로 실제로는 각각 위상이 반전된 주파수 f_1 과 f_3 의 정현파로 복원된다. 9, 17, 25, ..., $1 + 8l$, ... 고조파는 $f_{1+8l} = 1 + lf_s$ 을 만족하는 $f_1 = 1$ 이 최저 주파수 alias이고, 11, 19, 27, ..., $3 + 8l$, ... 고조파는 $f_{3+8l} = 3 + lf_s$ 을 만족하는 $f_3 = 3$ 이 최저 주파수 alias이므로, 각각 주파수 f_1 과 f_3 의 정현파로 복원된다. 따라서 전체적인 복원 신호는 다음과 같게 된다.

$$\begin{aligned} x_r(t) &= \sum_{l=0}^{\infty} b_{1+8l} \cos(2\pi t - \frac{\pi}{2}) + \sum_{l=0}^{\infty} b_{7+8l} \cos(2\pi t + \frac{\pi}{2}) \\ &\quad + \sum_{l=0}^{\infty} b_{3+8l} \cos(6\pi t - \frac{\pi}{2}) + \sum_{l=0}^{\infty} b_{5+8l} \cos(6\pi t + \frac{\pi}{2}) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} (b_{1+8l} - b_{7+8l}) \sin(2\pi t) - \sum_{l=0}^{\infty} (b_{3+8l} - b_{5+8l}) \sin(6\pi t) \\ &= B \sin(2\pi t) + C \sin(6\pi t) \end{aligned}$$

앞의 경우와 마찬가지로 $x_r(nT_s) = x(nT_s)$ 을 이용하여 위 식의 계수를 구할 수 있다. $T_s = 1/f_s = 1/8$ 이므로 $n = 1, 2$ 을 대입하면 다음의 관계가 성립된다.

$$B \sin(\pi/4) + C \sin(3\pi/4) = \frac{B}{\sqrt{2}} + \frac{C}{\sqrt{2}} = 1$$

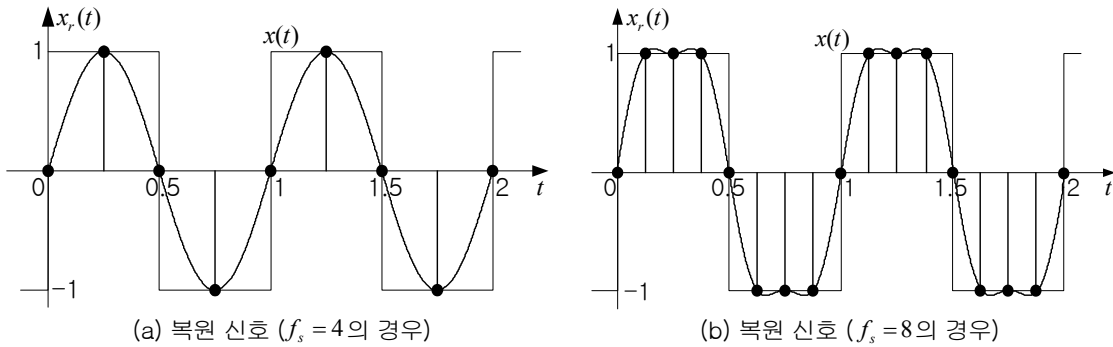
$$B \sin(\pi/2) + C \sin(3\pi/2) = B - C = 1$$

이를 풀면,

$$\begin{aligned} B &= (\sqrt{2} + 1)/2 \\ C &= (\sqrt{2} - 1)/2 \end{aligned}$$

따라서 복원 신호 $x_r(t)$ 는 다음과 같이 된다.

$$x_r(t) = \frac{\sqrt{2}+1}{2} \sin(2\pi t) + \frac{\sqrt{2}-1}{2} \sin(6\pi t)$$



[그림 C4-6] 주파수 중첩으로 인해 왜곡된 복원 신호

[그림 C4-6]에 두 샘플링 주파수에 대한 복원 신호의 파형을 보였다. 샘플링 주파수를 2배로 올린 $f_s = 8$ [Hz]일 때의 복원 신호는 기본파 성분 외에 3고조파 성분이 추가되어 $f_s = 4$ [Hz]일 때의 복원 신호보다 좀 더 구형파에 가깝다. 이로부터 샘플링 주파수를 높일수록 더 많은 고조파 성분들이 복원 신호에 포함되어 점점 구형파에 가까워질 것이라고 예측할 수 있다. ■

4.4 신호 복원

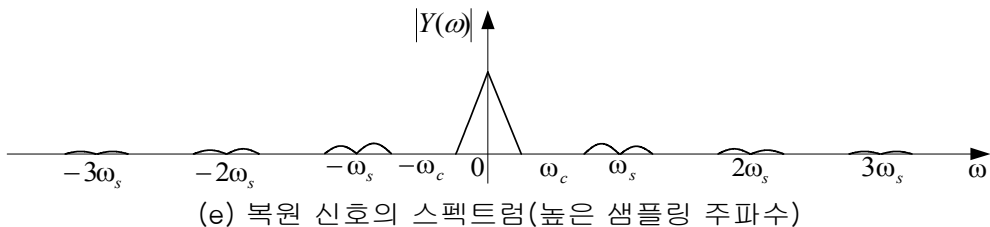
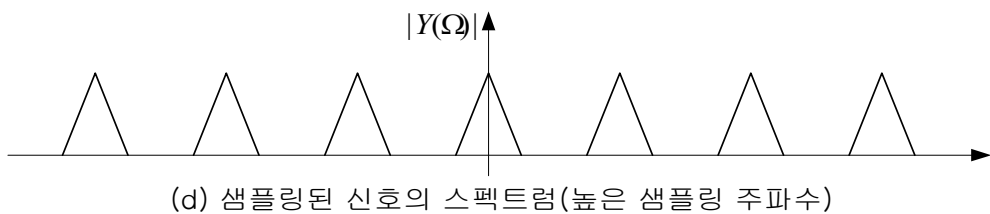
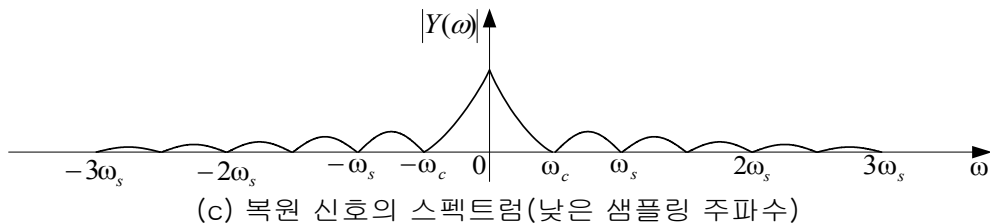
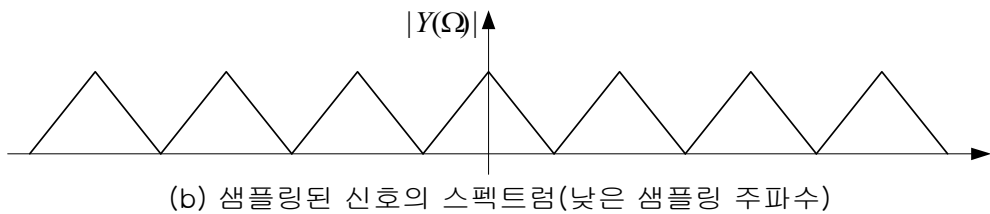
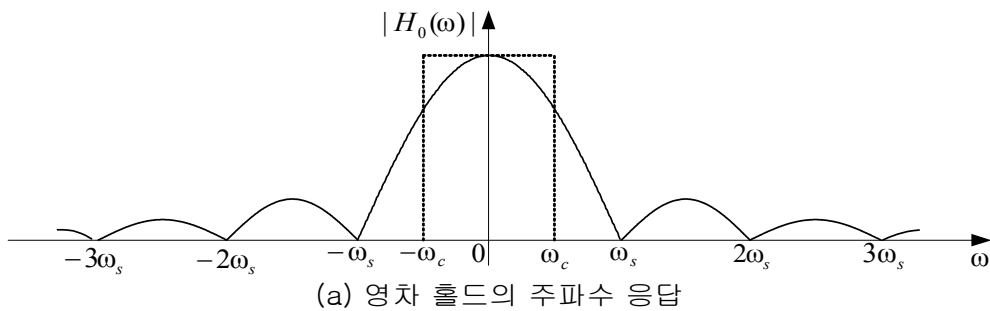
영차 홀드를 이용한 복원에서 복원 신호의 왜곡을 줄이기 위해 샘플링 주파수를 충분히 높이는 게 바람직하다고 설명했는데, 이를 주파수 스펙트럼의 관점에서 이해해보자.

[그림 C4-7]은 1절에서 후처리 필터의 보충 설명에 사용된 [그림 C4-1]을 확장하여 그린 것이다. 그림을 보면, (a)의 영차 홀드의 주파수 응답은 주엽^{main lobe}에 의해 이상적인 저역 통과 필터의 통과 대역이 거칠게 근사화되어 있다. 따라서 이득이 통과 대역 전체에 걸쳐 평탄하지 않고 주파수가 높아짐에 따라 크기가 줄어드는 양상을 보인다. 그리고 부엽들이 무시할 수 없는 크기로 존재하는데 샘플링 주파수의 정수배에서 부엽들은 0이 된다.

샘플링 주파수가 낮은 경우에는 그림 (b)의 기저 대역에 위치한 연속 신호의 스펙트럼이 거의 차단 주파수 부근까지 위치하므로 영차 홀드에 의해 복원된 연속 신호의 스펙트럼은 통과 대역에서 이득이 감소하는 영향을 받아 그림 (c)에서 보듯이 원래의 연속 신호의 스펙트럼과는 달리 조금 왜곡되어 있다. 그뿐만 아니라 샘플링으로 인해 나타나게 되는 허상들도 각 부엽의 거의 전 구간에 걸쳐 있어서 무시할 수 없는 크기로 나타난다.

그러나 샘플링 주파수를 높이면 이산 신호의 스펙트럼이 (d)와 같이 된다. 따라서 기저 대역 스펙트럼이 영차 홀드의 주파수 응답 이득이 이상적인 저역 통과 필터에 가까운 평탄한 대역에 위치하므로 (e)에서 보듯이 기저 대역 스펙트럼의 왜곡이 거의 없다. 게다가 샘플링 주파수를 주기로 하여 반복되는 허상 스펙트럼들도 샘플링 주파수를 중심으로 하는 좁은 주파수 대역에 위치하므로 부엽의 영향으로 제거되지 않고 나타나는 고주파 성분도 훨씬 미미해진다.

그러므로 샘플링 주파수를 충분히 높이면, 구태여 후처리 필터를 사용하지 않더라도 만족할 만한 고주파 허상 제거 효과를 얻을 수도 있다.



[그림 C4-7] 영차 홀드 복원 신호의 고주파 성분 허상

4.5 A/D변환과 D/A변환

■ 예제 C4-6 : 양극성 양자화를 이용한 2의 보수형 이진 부호화

$-10 \leq x[n] \leq 10$ 인 이산 신호를 양극성 반올림 양자화를 이용한 3비트 2의 보수형 2진 부호화를 한다고 하자. 이때 $x[n]$ 의 값을 10으로 나누어 규준화하면 (책)표 4.1을 그대로 활용할 수 있게 된다. 다음은 몇 가지 값에 대해 부호화한 예로서, 비록 같은 코드로 부호화되더라도 실제 값은 차이가 남을 볼 수 있다.

$$\begin{aligned} x[n] = 4.5 &\rightarrow x_b[n] = 010, & x[n] = 6.2 &\rightarrow x_b[n] = 010, \\ x[n] = -8.4 &\rightarrow x_b[n] = 101, & x[n] = -6.3 &\rightarrow x_b[n] = 101 \end{aligned}$$

■

■ 예제 C4-7 : 디지털 신호(이진 코드)의 복호화

디지털 신호 $y_b[n] = 10110_2$ 에 대해 앞에서 설명한 각각 다른 부호화 방법에 따른 변환 이산 신호 $y_Q[n]$ 를 구해보자. 단 $R = 64 = 2^5$ 이다.

$y_b[n]$ 이 단극성 자연 이진 부호화에 의한 것이면 (책)식 (4.33)으로부터

$$y_Q[n] = (1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4} + 0 \times 2^{-5}) \times 2^5 = 22_{10}$$

$y_b[n]$ 이 양극성 2의 보수형 이진 부호화에 의한 것이면 (책)식 (4.34)로부터

$$y_Q[n] = (-1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} + 0 \times 2^{-4}) \times 2^4 = -10_{10}$$

$y_b[n]$ 이 양극성 부호부 크기 이진 부호화에 의한 것이면 (책)식 (4.35)로부터

$$y_Q[n] = ((-1)^1 (0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} + 0 \times 2^{-4})) \times 2^4 = -6_{10}$$

■