

IT CookBook, 핵심이 보이는 제어공학

## [연습문제 답안 이용 안내]

- 본 연습문제 답안의 저작권은 한빛아카데미(주)에 있습니다.
- 이 자료를 무단으로 전제하거나 배포할 경우 저작권법 136조에 의거하여 최고 5년 이하의 징역 또는 5천만원 이하의 벌금에 처할 수 있고 이를 병과(併科)할 수도 있습니다.

## Chapter 11 연습문제 답안

### 《객관식》

- 11.1 Ⓐ      11.2 Ⓐ      11.3 Ⓒ      11.4 Ⓐ      11.5 Ⓐ
- 11.6 Ⓒ      11.7 Ⓒ      11.8 Ⓐ      11.9 Ⓒ

### 《주관식》

11.10 (437쪽 11.1절 참조)

11.11 (442쪽 11.2절 참조)

11.12 (447쪽 11.3절 참조)

11.13 (445쪽의 식(11.10) 아래 설명과 450쪽의 풀이를 참조)

11.14

(a)  $K_p = 1$

$$e_{step}(\infty) = 0.5 \rightarrow 50[\%]$$

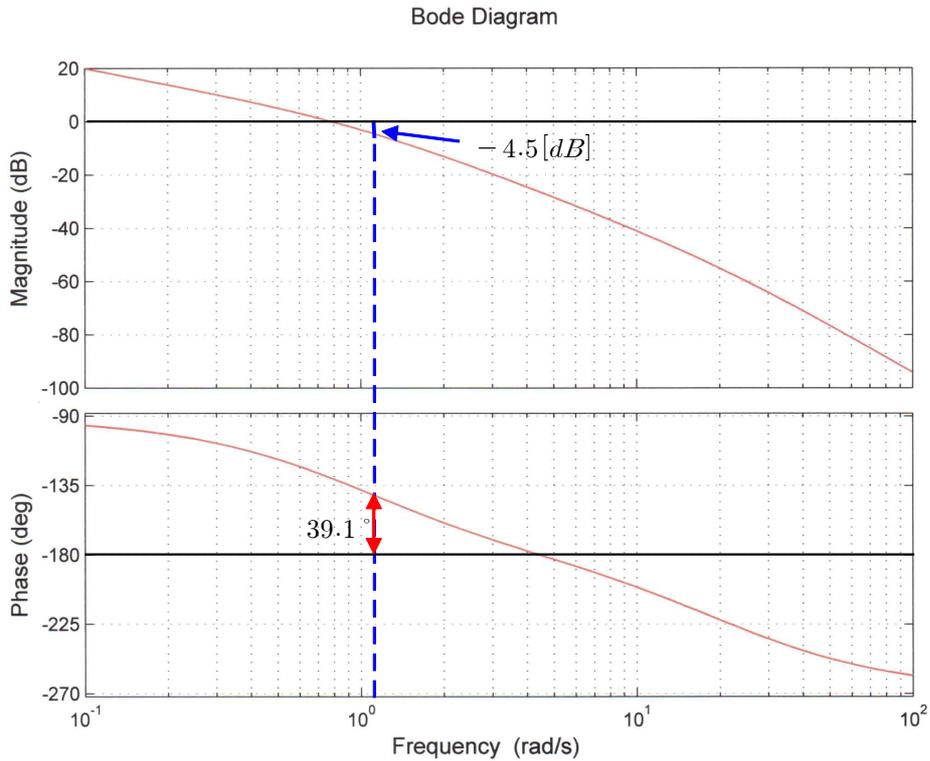
(b)  $\frac{1}{1+K_p} = 0.05 \rightarrow K_p = 19 \rightarrow K = 19$

(c) 이 시스템이 불안정해진다.

(d)  $\frac{z_c}{p_c} = 19 \rightarrow \frac{z_c}{p_c} = \frac{0.19}{0.01}$

$$G_{lag}(s) = \frac{s+0.19}{s+0.01}$$

11.15



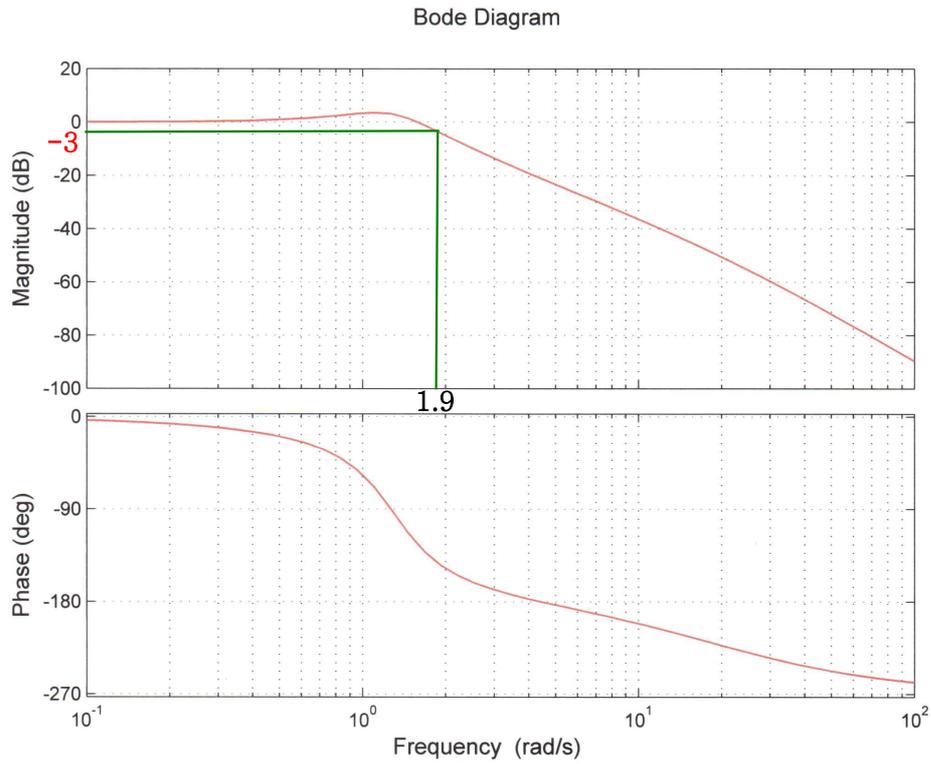
[그림 P11.15(a)] 개루프 전달함수  $G(s) = \frac{20}{s(s+1)(s+20)}$  의 보드선도

(a) 이득정수 K 값을 1.68로 해야 한다.

(b) 오버슈트를 30[%]는 위상여유가 39.1[도]를 의미하며, 위상여유가 39.1[도]는 감쇠비  $\zeta = 0.36$ 을 의미한다.

아래 [그림 P11.15(b)]에서 대역폭이  $\omega_{BW} = 1.9rad/sec$ 임을 알 수 있으며, 감쇠비와 대역폭에 의해서 정정시간은 다음과 같이 된다.

$$T_s \approx 8.187[sec]$$



[그림 P11.15(b)] 페루프 전달함수  $M(s) = \frac{33.6}{s^3 + 21s^2 + 20s + 33.6}$  의 보드선도

### 11.16

(a)  $e_{ramp}(\infty) = \frac{1}{42.9} \approx 0.023 \rightarrow 2.3[\%]$

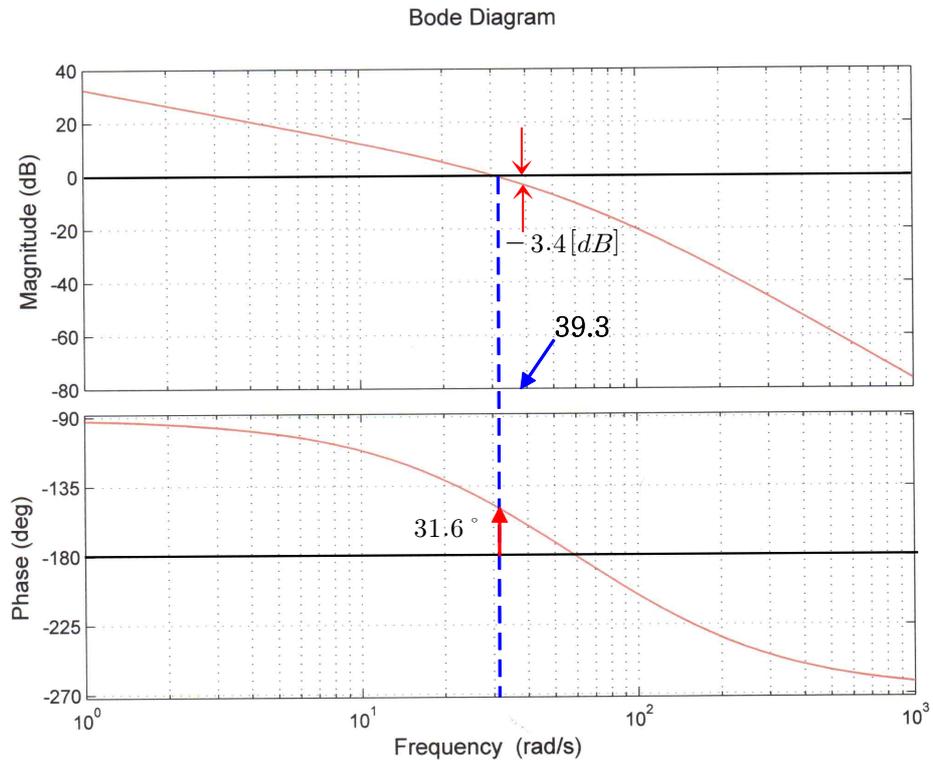
(b) 25[%]의 %OS는  $\zeta = 0.404$ 를 의미하며, 그러기 위한 주파수응답의 위상여유는

$$\Phi_M = 43.5^\circ$$

로 해야 한다([그림 P11.16(a)] 참조). 이를 위해 최대 위상이  $22^\circ$ 인 진상제어기를 설계해 본다.

$$\beta \approx 0.455$$

$$g = 3.4[dB]$$



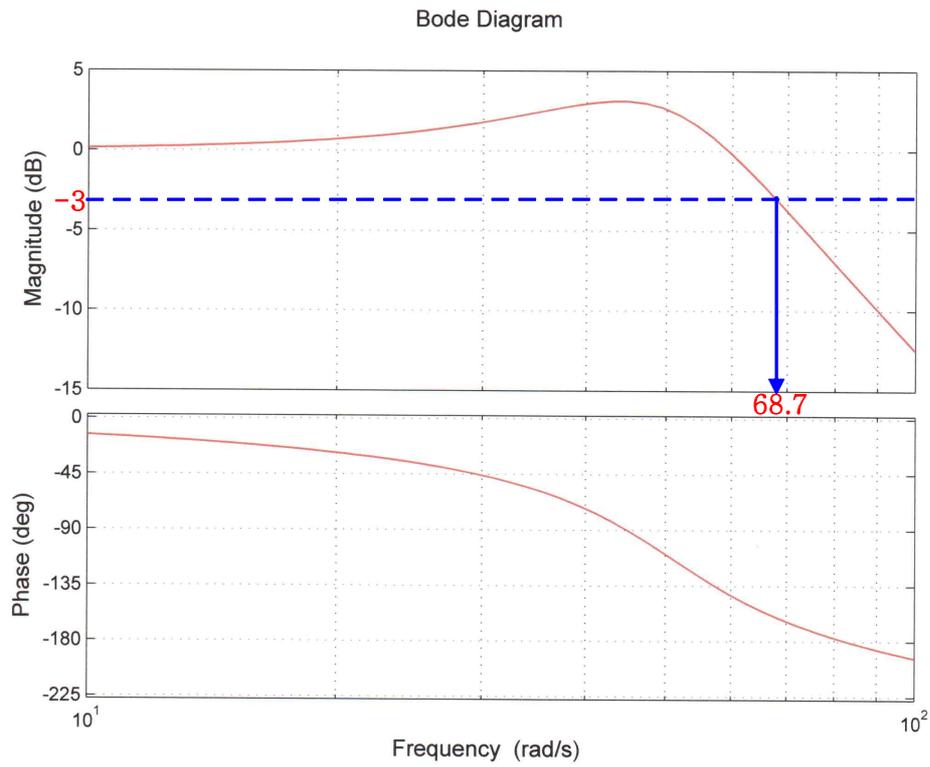
[그림 P11.16(a)] 개루프 전달함수  $G(s) = \frac{150,000}{s(s+35)(s+100)}$  의 보드선도

따라서 현재 개루프 전달함수의 보드선도에서 이득  $-3.4[dB]$ 인 점의 주파수, 즉  $39.3[rad/sec]$ 가 진상제어기의 최대위상주파수  $\omega_{max}$ 가 되어야 한다.

$$39.3 = \sqrt{z_c p_c} \qquad 0.455 = \frac{z_c}{p_c}$$

$$\therefore p_c \approx 58, \quad z_c \approx 27$$

(c)



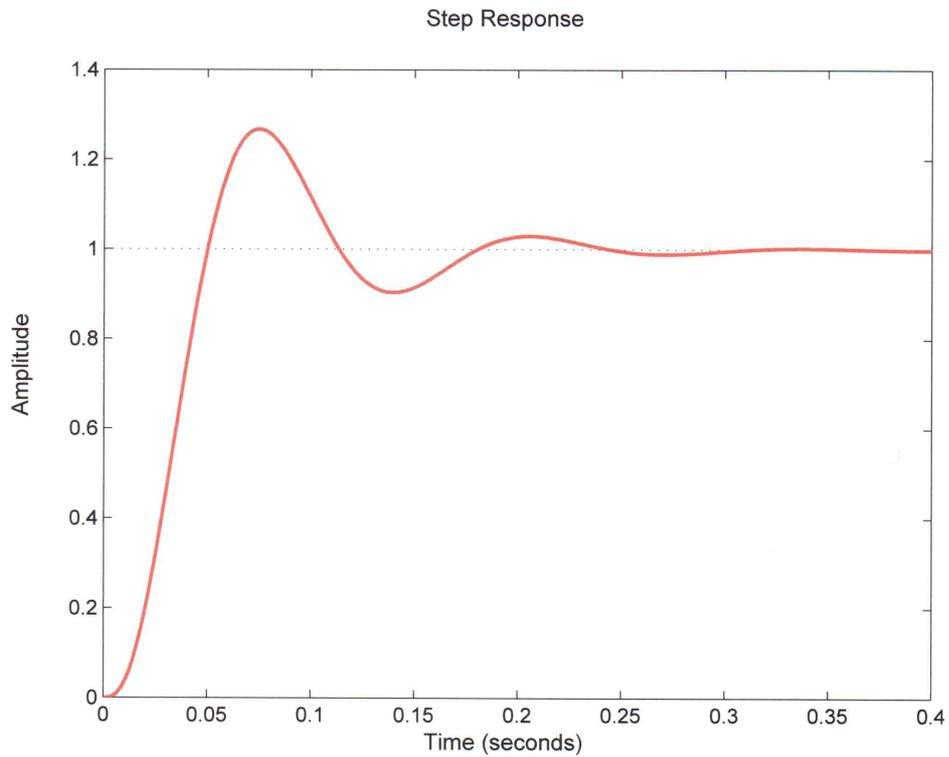
[그림 P11.16(b)] 폐루프 전달함수  $G(s) = \frac{20}{s(s+1)(s+20)}$  의 보드선도

$$\omega_{BW} = 68.7 [\text{rad/sec}]$$

$$\Phi_M = 42.1^\circ \quad \rightarrow \quad \zeta = 0.39$$

$$T_p \approx 0.07 [\text{sec}] < 0.1 [\text{sec}]$$

(d)



전향경로에 진상제어기가 추가된 단위귀환제어시스템의 단위계단응답의 사양들은 다음과 같다.

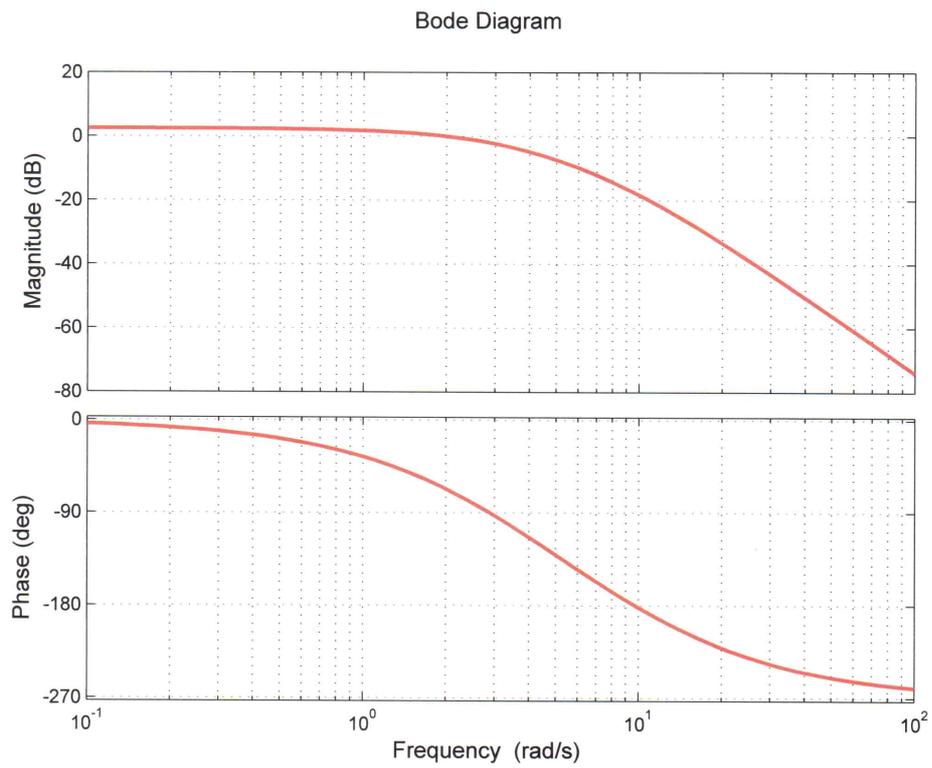
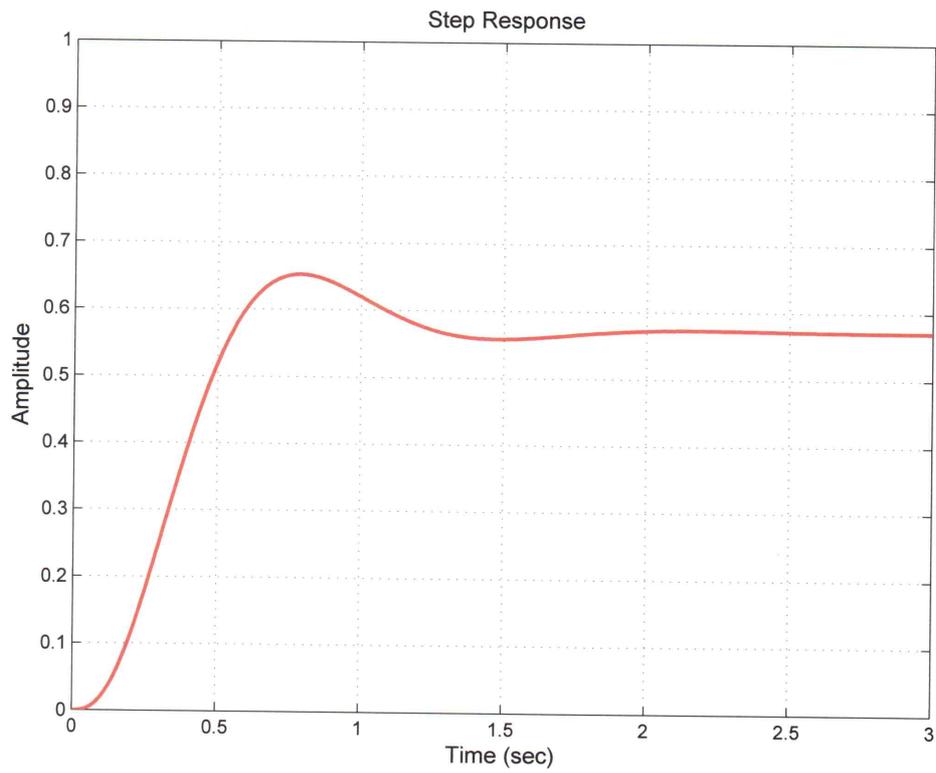
정정시간  $T_s = 0.22[\text{sec}]$

상승시간  $T_r = 0.03[\text{sec}]$

침두값시간  $T_p = 0.08[\text{sec}]$

백분율 오버슈트  $\%OS = 25.9[\%]$

11.17



시스템의 단위계단응답과 개루프 전달함수의 보드선도에서 다음과 같은 시간응답 사양과 주파수응답 사양들을 알 수 있다.

정정시간	$T_s = 1.58[\text{sec}]$
상승시간	$T_r = 0.35[\text{sec}]$
침투값시간	$T_p = 0.79[\text{sec}]$
백분율 오버슈트	$\%OS = 14.25[\%]$
이득여유	$G_M = 17.84[\text{dB}]$
이득여유주파수	$\omega_{GM} = 9.75[\text{rad/sec}]$
위상여유	$\Phi_M = 112^\circ$
위상여유주파수	$\omega_{\Phi_M} = 2.04[\text{rad/sec}]$

(a)

▶ 백분율 오버슈트문제

20[%]의 백분율 오버슈트( $\leftarrow$ 감쇠비  $\zeta = 0.456$ )를 얻기 위해서는 위상여유가  $48.2^\circ$ 가 되어야 한다. 현재 위상여유가  $\Phi_M = 112^\circ$ 이므로 전향경로의 이득을 높여 위상여유를 맞출 수 있다.

개루프전달함수의 보드선도에서  $48.2^\circ$ 의 위상여유를 나타내고 있는 주파수  $5.1[\text{rad/sec}]$ 에서 현재 이득이  $-7.5[\text{dB}]$ 이므로 전향경로에 증폭도  $2.37(=7.5[\text{dB}])$ 인 증폭기를 추가하면 된다.

▶ 정상상태 오차 문제

현재의 위치상수와 정상상태오차는 다음과 같다.

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{200}{(s+3)(s+5)(s+10)} = \frac{4}{3}$$

$$e_{step}(\infty) = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{1+\frac{4}{3}} = 0.43 \quad \leftarrow 43[\%]$$

이 정상상태오차를 5[%], 즉 0.05보다 작게 만들기 위해서는 이득정수를 15배( $=23.5[\text{dB}]$ ) 정도 증폭시켜야 하는데, 현재 이득여유가  $17.84[\text{dB}]$ 밖에 되지 않아 이득조정만으로는 정상상태오차를 바라는 정도로 개선할 수 없으며, 시간응답의 오버슈트에 영향을 미치지 않게 하려면, 앞에서 이미 백분율 오버슈트를 개선하기 위하여 사용한 이득정수는 2.37을 제하고, 나

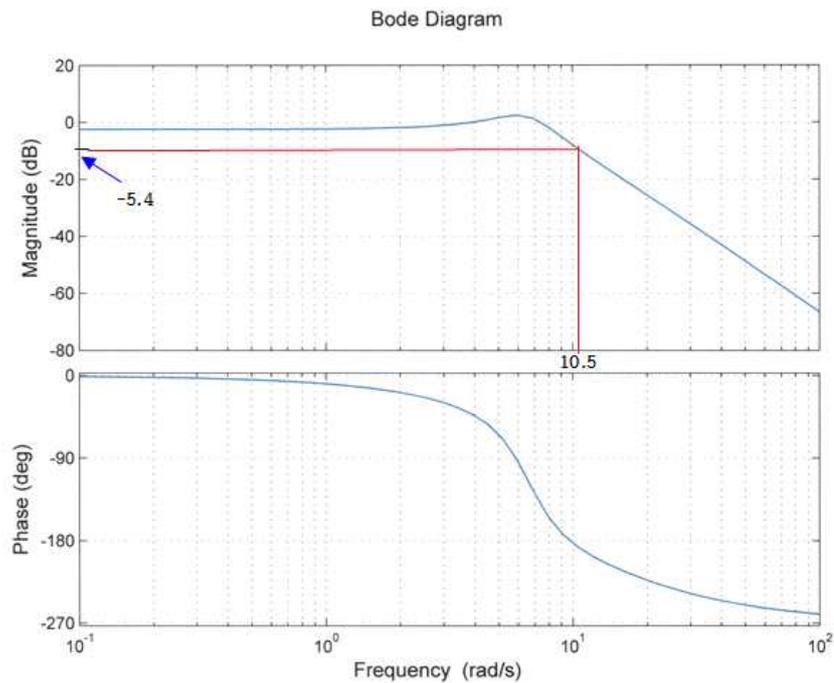
머지  $6.33 (= \frac{15}{2.37})$ 은 지상제어기로 해결해야 한다. 여기에서 다음과 같은 지상제어기를 설계할 수 있다.

$$G_{lag}(s) = \frac{s + 0.19}{s + 0.03}$$

▶ 정정시간 문제

지상제어기를 제하고, 증폭도 2.37의 증폭기만 추가된 폐루프 시스템의 보드선도를 그려보면 아래 그림과 같다.

$$\begin{aligned} M(s) &= \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{2.37 \times \frac{200}{(s+3)(s+5)(s+10)}}{1 + 2.37 \times \frac{200}{(s+3)(s+5)(s+10)}} \\ &= \frac{474}{s^3 + 18s^2 + 95s + 624} \end{aligned}$$



여기에서 이득이  $-5.4[dB] \left\{ = 20 \log \left( \frac{474}{624} \times 0.707 \right) \right\}$  되는 주파수(=대역폭)를 찾아보면  $\omega_{BW} = 10.5[rad/sec]$ 로, 정정시간은

$$\omega_{BW} = \frac{4}{T_s \zeta} \sqrt{(1-2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}}$$

$$10.5 = \frac{4}{T_s \times 0.456} \sqrt{(1-2 \times 0.456^2) + \sqrt{4 \times 0.456^4 - 4 \times 0.456^2 + 2}}$$

$$T_s = \frac{4}{10.5 \times 0.456} \times 1.32 \approx 0.835[sec]$$

로 만족스럽지 못하다.

정정시간을 줄이려면 대역폭 값이 더 커져야 하고, 그러려면 이득곡선이 오른쪽으로 이동해야 하며, 따라서 이득교차점이 오른쪽으로 이동해야 한다. 그러기 위하여서는 개루프 전달함수의 이득정수를 증가시키면 되겠지만, 안정도 문제로 이득정수의 크기에는 제한이 있고, 또한 이득이 증가하여 보드선도에서 이득교차점이 오른쪽으로 이동하면 그 만큼 위상각이 작아져 오버슈트에 나쁜 영향을 미친다.

따라서 이득도 증가시키면서 위상도 보상해주는 진상제어기를 사용한다.

※ 일반적 진상제어기는 위상여유가 너무 작아서 위상여유를 보상해 줄 필요가 있을 때 사용되는 것으로 지금과 같이 대역폭에 문제가 있을 때의 설계방법에는 특별한 설계기준이 없지만 위상을 보상해 주는 경우에 준하여 설계해 본다. 다만 여기에서 보상해 주어야 하는 것은 위상이 아니고 이득이라는 것을 주의해야 한다.

### 진상제어기 설계

먼저 정정시간을 0.5[sec]로 하기 위한 대역폭을 다음과 같이 계산한다.

$$\omega_{BW} = \frac{4}{T_s \zeta} \sqrt{(1-2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}}$$

$$\omega_{BW} = \frac{4}{0.5 \times 0.456} \sqrt{(1-2 \times 0.456^2) + \sqrt{4 \times 0.456^4 - 4 \times 0.456^2 + 2}}$$

$$\omega_{BW} = \frac{4}{0.5 \times 0.456} \times 1.32 \approx 23.2[rad/sec]$$

진상제어기의 최대위상주파수를  $\omega_{max} = 23.2[\text{rad/sec}]$ 로 정하고, 극점과 영점의 비를 100으로 하고 설계해 보자.

$$\omega_{max} = \sqrt{z_c p_c}$$

$$\beta = \frac{z_c}{p_c}$$

$$23.2 = \sqrt{z_c p_c}$$

$$0.01 = \frac{z_c}{p_c}$$

$$z_c p_c = 23.2^2 = 538.24$$

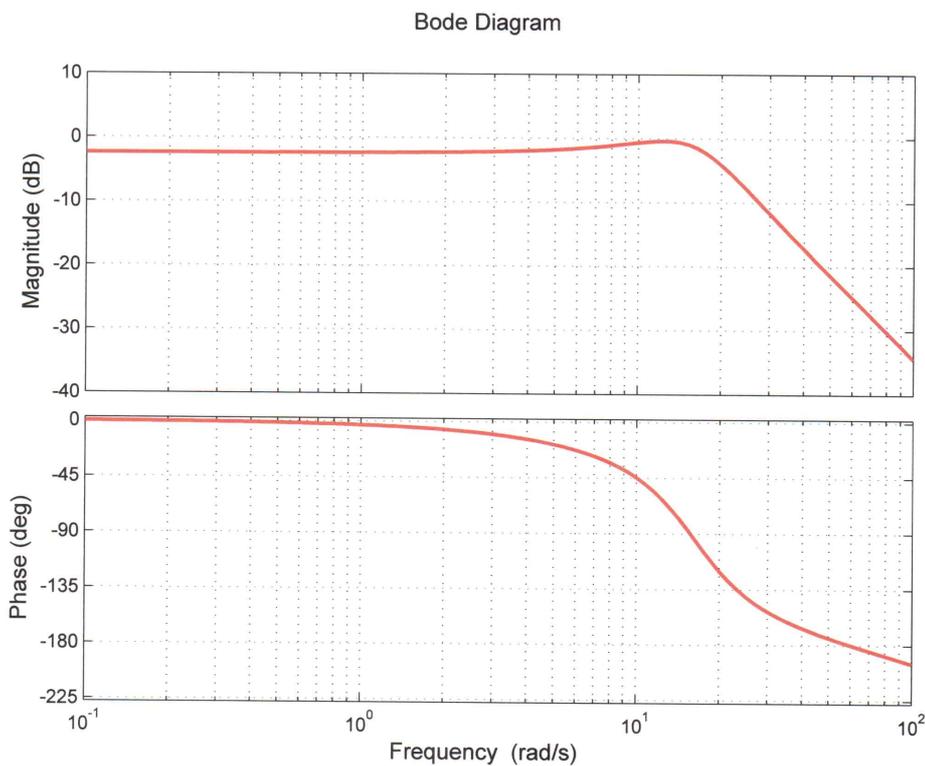
$$z_c = 0.01 p_c$$

$$0.01 p_c^2 = 538.24$$

$$\therefore p_c \doteq 232 \quad z_c \doteq 2.32$$

$$G_{lead}(s) = 100 \times \frac{s + 2.32}{s + 232}$$

이제 증폭기와 진상제어기가 추가된 시스템의 대역폭을 페루프 보드선도에서 구해본다.



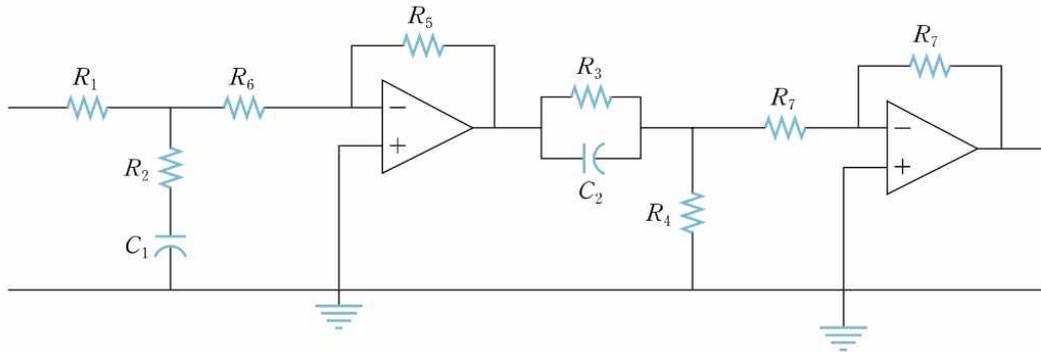
보드선도에서 대역폭이 24.42로 구해진다.

이상에서 풀은 것을 종합하면, 다음과 같은 진·지상제어기를 설계할 수 있다.

$$G_c(s) = G_{lag}(s)G_{lead}(s) = 2.37 \times \frac{s + 0.19}{s + 0.03} \times 100 \times \frac{s + 2.32}{s + 232}$$

$$= 237 \times \frac{(s + 0.19)(s + 2.32)}{(s + 0.03)(s + 232)}$$

(b)



지상제어기

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} \times \frac{s + \frac{1}{R_2 C_1}}{s + \frac{1}{(R_1 + R_2) C_1}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \times \frac{s + 0.19}{s + 0.03}$$

$$\frac{1}{R_2 C_1} = 0.19$$

$$\frac{1}{(R_1 + R_2) C_1} = 0.03$$

$C_1 = 10[\mu F]$ 라고 정하면,  $R_2 \approx 526.3[k\Omega]$ 이 되고,  $R_1 = 2.8[M\Omega]$ 가 되며, 이 수동 지상 제어기 회로를 이와 같이 구현하였을 때 나타나는 감쇠정수

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{526.3}{2800 + 526.3} = \frac{1}{6.32}$$

를 진상제어기를 설계할 때, 연산증폭기의 증폭도를 6.32만큼 증가시켜서 상쇄시켜 주어야 한다.

### 진상제어기

$$\frac{s + \frac{1}{R_3 C_2}}{s + \frac{1}{R_3 C_2} + \frac{1}{R_4 C_2}} = \frac{s + 2.32}{s + 232}$$

$$\frac{1}{R_3 C_2} = 2.32$$

$$\frac{1}{R_3 C_2} + \frac{1}{R_4 C_2} = 232$$

$$C_2 = 10 [\mu F], R_3 = 43.1 [k\Omega], R_4 = 435.4 [\Omega]$$

### 증폭기

지상제어기와 진상제어기 사이에 삽입할 연산증폭기의 증폭도는 지상제어기에서 나타나는 감쇠분을 보완하여 다음과 같이 정한다.

$$K_c = 237 \times 6.32 = 1497.8$$

$$R_6 = 100 [\Omega], R_5 = 149.78 [k\Omega]$$

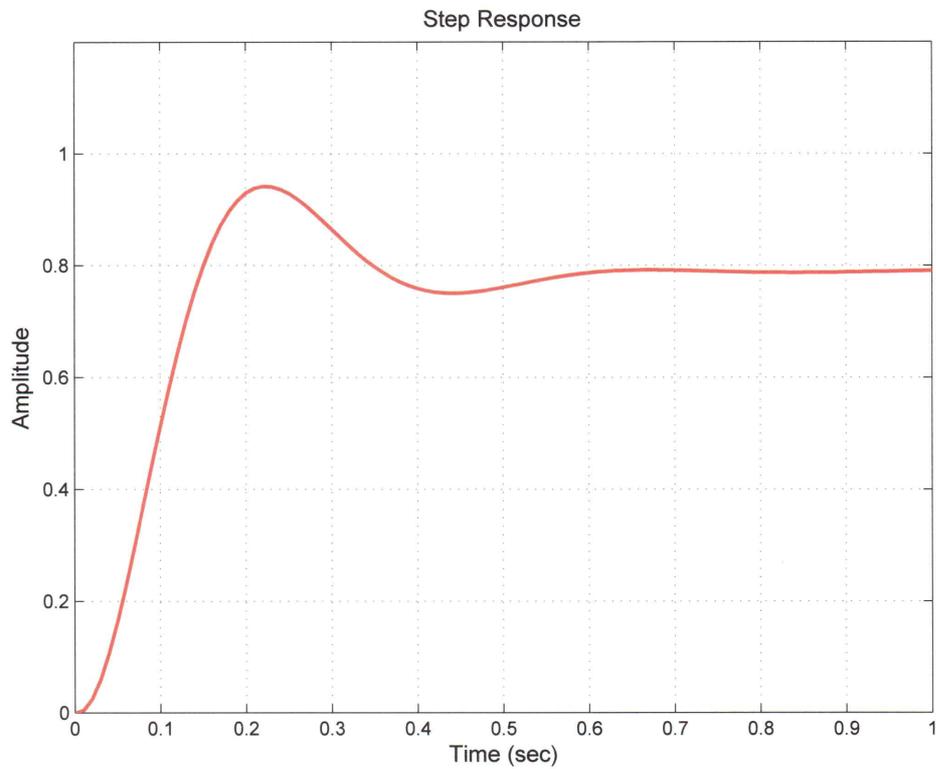
반전연산증폭기는 증폭도가 (-) 값을 가지므로 제어기 말단에 증폭도 (-)인 반전연산 증폭기, 즉 버퍼(buffer)를 하나 추가해야 한다.

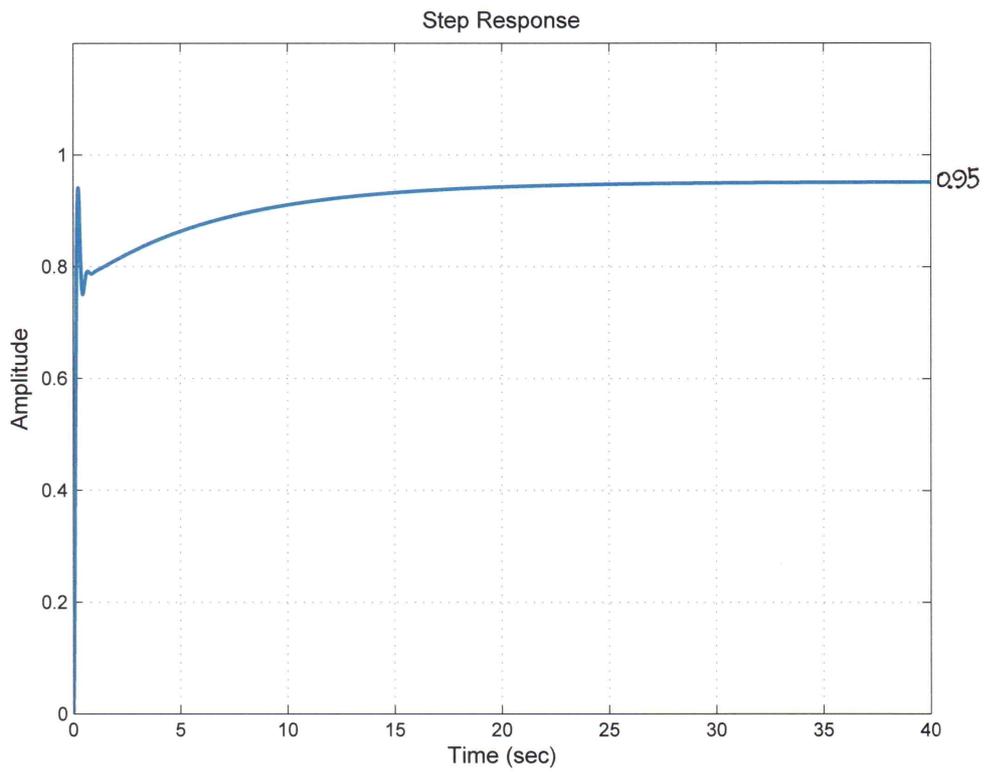
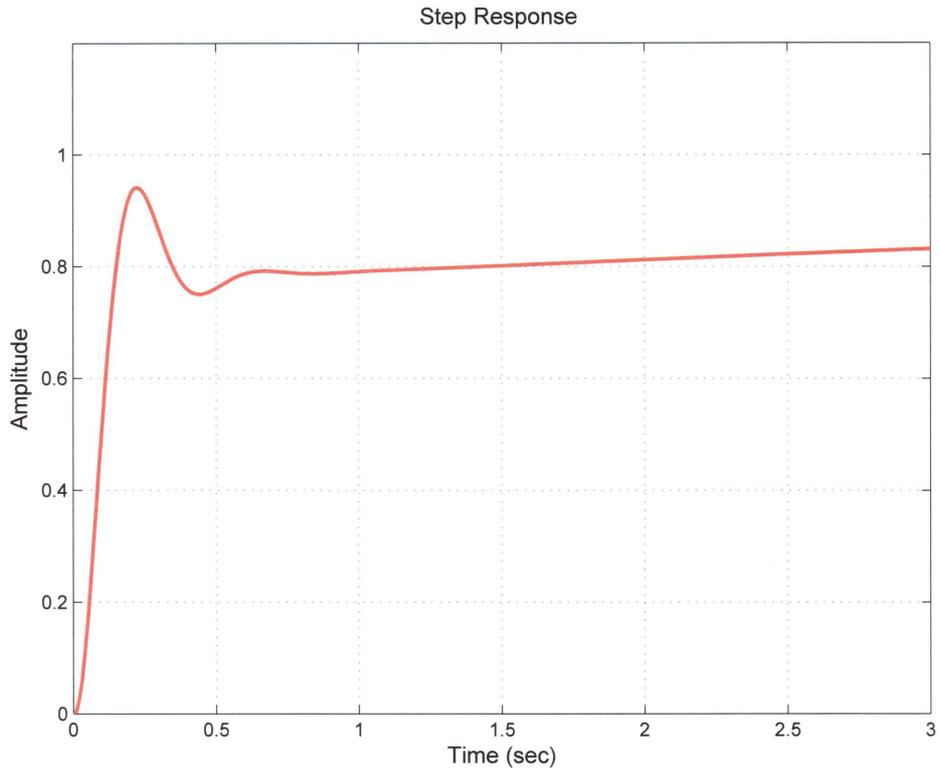
$$R_7 = 10 [k\Omega]$$

$$\begin{aligned}
 (c) \quad G_c(s) &= G_{lag}(s)G_{lead}(s) = 2.37 \times \frac{s+0.19}{s+0.03} \times 100 \times \frac{s+2.32}{s+232} \\
 &= 237 \times \frac{(s+0.19)(s+2.32)}{(s+0.03)(s+232)}
 \end{aligned}$$

위의 진·지상제어기를 전향경로에 추가한 문제의 시스템의 단위계단응답을 구하여 보면 아래 그림과 같다.

※ 아래의 3개의 그림은 같은 출력을 이해를 돕기 위하여 시간범위 조정을 한 것뿐이다.





11.18

rise\_time =

0.0300

peak\_time =

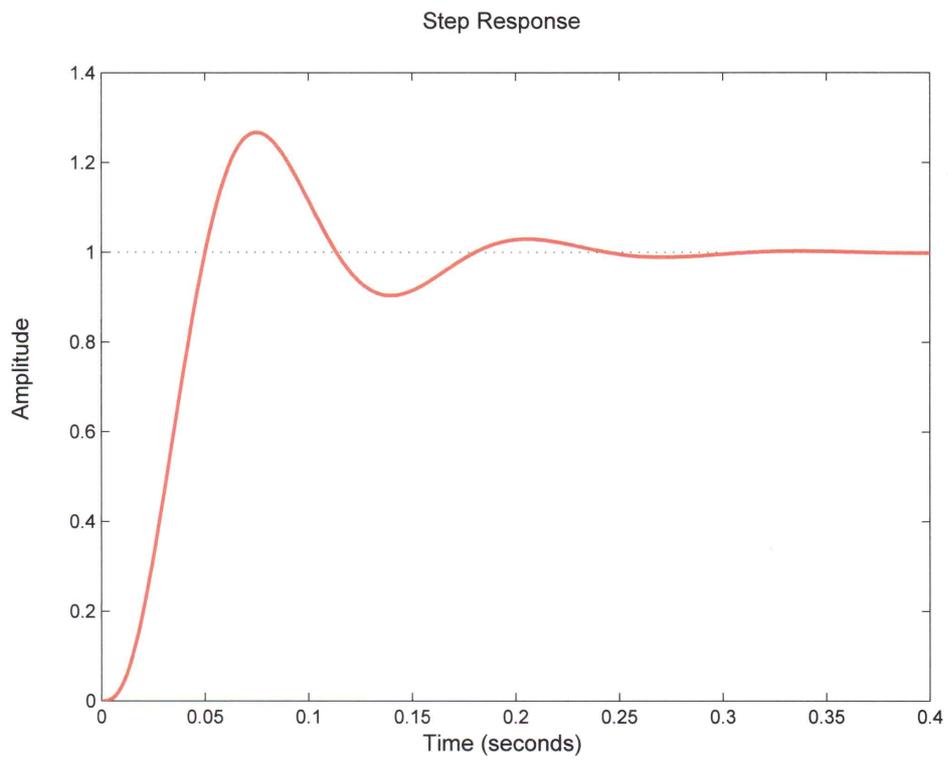
0.0800

percent\_overshoot =

25.8787

settling\_time =

0.2200



11.19

(a) 위치상수  $K_p \approx 1.33$

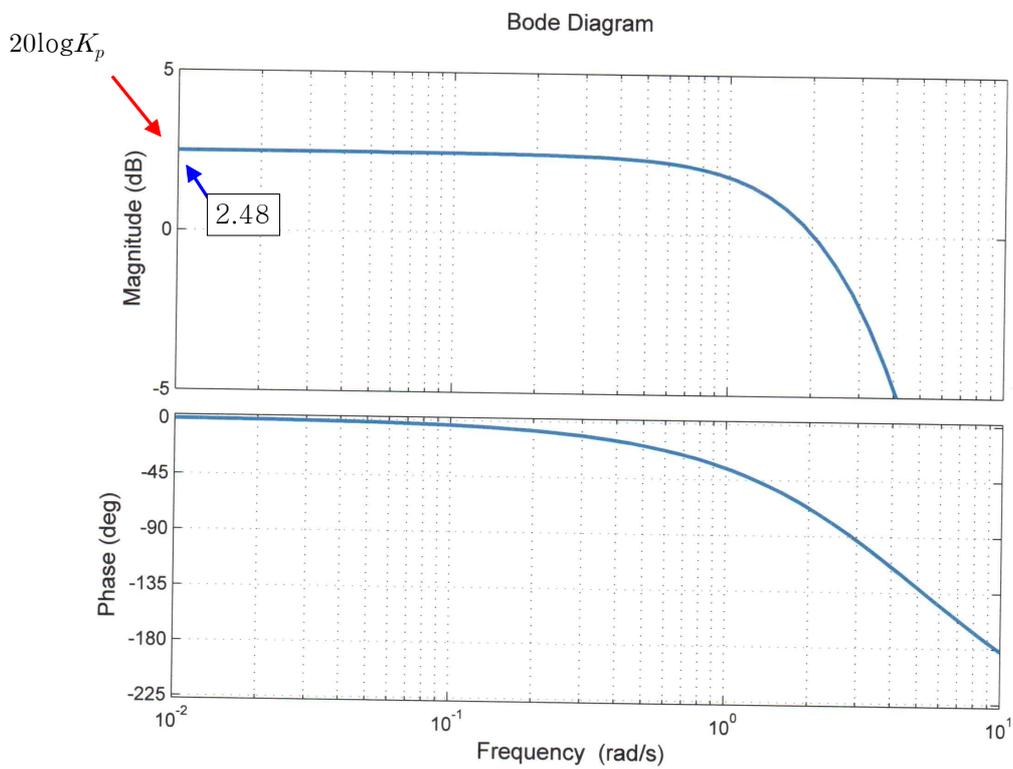
(b) 이득여유, (c) 위상여유

17.8441 112.0279 9.7479 2.0411

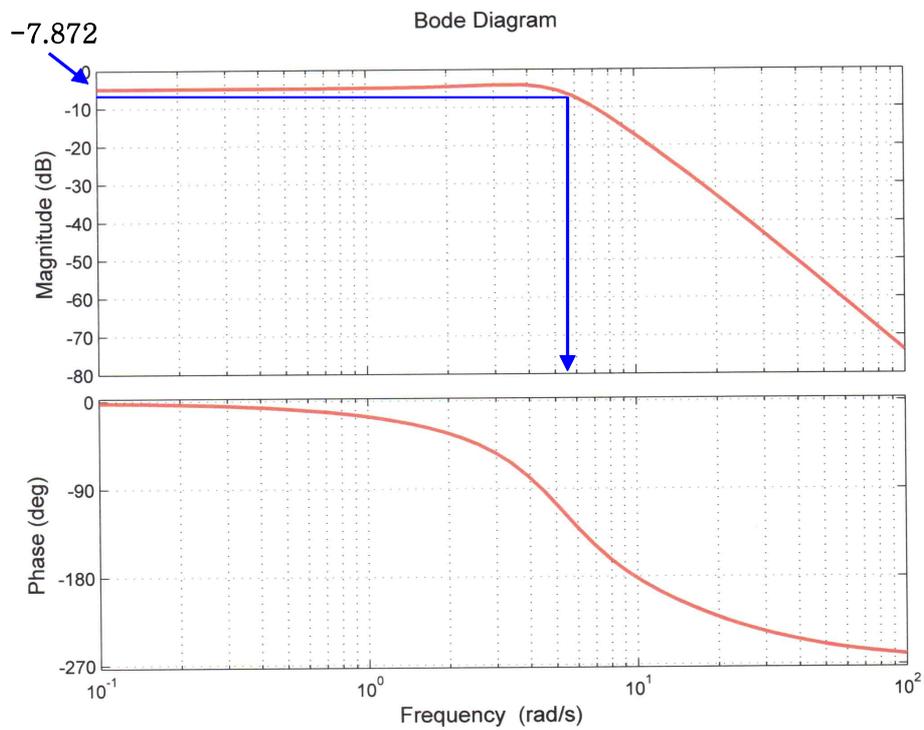
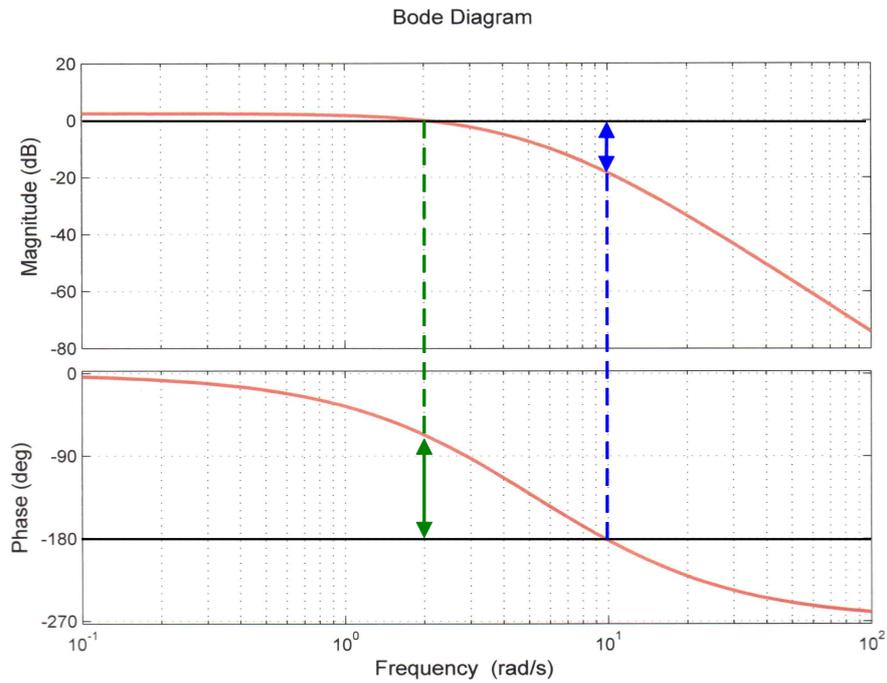
※ 이득여유[dB], 위상여유[deg], 이득여유주파수[rad/sec], 위상여유주파수[rad/sec] 순

(d) 대역폭

bandwidth = 6.8665



[그림 P11.19(a)] 개루프 전달함수  $G(s) = \frac{200}{(s+3)(s+5)(s+10)}$  의 보드선도



[그림 P11.19(b),(c)] 전향경로 전달함수  $G(s) = \frac{200}{(s+3)(s+5)(s+10)}$  를 가진 직결귀환시스템의 보드선도

※ 대역폭을 구할 때는 페루프 전달함수의 보드선도를 사용한다는 것을 주의해야 한다. 또한 항상 이득이 -0.707이 아니라  $\omega = 0$ 일 때의 값의 0.707배임을 유념해야 한다.