7.1 연습문제

1. **(a)** $x = \frac{1}{4}t^4 + \frac{7}{3}t^3 - \frac{2}{3}t^{3/2} + c$

(b) $x = ce^t$

(e) $x = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$ 또는 $x = c_1 \cosh t + c_2 \sinh t$

2. **(a)** $x = \frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{4}t^{4/3} + 7$

3. **(c)** $x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} + c$

(d) $x = e^{-t^2/2}\left[\int t^2 e^{t^2/2}\, dt + c\right]$

4.
$$x = a_0 + a_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(2n)!}\right) t^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{n!2^n}{(2n+1)!}\right) t^{2n+1}$$

6. $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$로 놓고 a_i를 결정한다.

9. $t = 10$, 오차$= 2.2 \times 10^4 \varepsilon$; $t = 20$, 오차$= 4.8 \times 10^8 \varepsilon$

10. $x^{(iv)} = 18xx'x'' + 6(x')^3 + 3x^2 x'''$

11.(a)
$$\begin{aligned} x' &= x + e^x; \\ x'' &= (1 + e^x)x'; \\ x''' &= (1 + e^x)x'' + e^x(x')^2; \\ x^{(iv)} &= (1 + e^x)x''' + 3e^x x' x'' + e^x (x')^3. \end{aligned}$$

12. $x(0.1) = 1.21633$

14.

$n \leftarrow 20$
$s \leftarrow x^{(n)}$
for $i = 1$ **to** $n - 1$
  $s \leftarrow x^{(n-i)} + [h/\mathrm{real}(n + 1 - i)]s$
end for
$s \leftarrow x + h[s]$

7.1 컴퓨터 연습문제

1. $x(2.77) = 385.79118$

2.(b) $x(1.75) = 0.63299\,9983$

(c) $x(5) = -0.20873\,51554$

3. $x(10) = 22026.47$

4. (a) $t=1$에서의 오차는 1.8×10^{-10}

5. $x(0) = 0.03245\,34427$

7. $x(1) = 1.64872\,12691$

9. $x(0) = 1.67984\,09205 \times 10^{-3}$

10. $x(0) = -3.75940\,73450$

7.2 연습문제

2. (c) $f(t, x) = +\sqrt{x/\left(1 - t^2\right)}$

3. $x(-0.2) = 1.92$

5. (a)

real function $f(t, x)$
real t, x
$\quad f \leftarrow t^2/(1 - t + 2x)$
end function f

8. $\dfrac{df}{dx} = e^{-x^2}$ 를 푼다. $f(0) = 0$

10. $h^3\left(\frac{1}{6} - \frac{\alpha}{4}\right)D^2 f + \frac{h^3}{6} f_x Df$ 이때

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + f\frac{\partial}{\partial x}$$

$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2f\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t} + f^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

11. $h = 1/1024$

12. 국소절단오차$\le 10^{-13}$을 만들자. 그러므로 $100h^5 \le 10^{-13}$ 또는 $h \le 10^{-3}$이다. $h = 10^{-3}$을 취하고 세 개의 추가 자리수가 10자리 정확도를 유지하기에 충분하기를 바란다.

14. (b) $x^{(iv)} = D^3 f + f_x D^2 f + 3Df_x\, Df + f_x^2\, Df$ 이때

$$D^3 = \frac{\partial^3}{\partial t^3} + 3f\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial t^2} + 3f^2\frac{\partial^3}{\partial t\,\partial x^2} + f^3\frac{\partial^3}{\partial x^2}$$

15.
$$\begin{aligned} f(x+th, y+tk) = f(x,y) + t[f_1(x,y)h + f_2(x,y)k] \\ + \frac{1}{2}t^2\left[f_{11}(x,y)h^2\right. \\ \left. + 2f_{12}(x,y)hk + f_{22}(x,y)k^2\right] \\ + \cdots \end{aligned}$$

이제 $t=1$로 놓고 두 개의 변수를 가진 테일러 급수의 일반적인 형태를 얻는다.

17. (a,b)에 대한 $f(x,y)=g(x)+h(y)$의 테일러 급수는 a에 대한 $g(x)$의 테일러 급수와 b에 대한 $h(y)$의 테일러 급수의 합과 같다.

18 $f(1+h,k) \approx -3h + \frac{3}{2}h^2 + k^2$

19. $e^{1-xy} \approx 3 - x - y$

20. $A = 1 + k + \frac{1}{2}k^2, \quad B = h(1+k)$

21. $A = 1, \quad B = h - k, \quad C = (h-k)^2$

22. $f(x+h, y+k) \approx$
$\left(1 + 2xh + k + (1+2x^2)h^2 + 2hkx + \frac{1}{2}k^2\right) f;$
$f(0.001, 0.998) \approx 2.71285\,34$

7.2 컴퓨터 연습문제

2. $x(1) = 1.5708$

3. (b) $n = 7;\quad x(2) = 0.82356\,78972$ (RK),
$x(2) = 0.82356\,78970$ (TS)

(c) $n = 7;\quad x(2) = -0.49999\,99998$ (RK),
$x(2) = -0.50000\,00012$ (TS)

4. $x(1) = 0.60653 = x(3)$ **5.** $x(3) = 1.5$

6. $x(0) = 1.0 = x(1.6)$ **8.** $x(1) = 3.95249$

9. $x(10) = 1.344 \times 10^{43}$

7.3 연습문제

1. $h=1/n$으로 두자. 그럼 $x(1)=e^{-1}$(실제 해)이다. 그리고 $x_n=\{[1-1/(2n)]/[1+1/(2n)]\}^n$(근사 해)이다.

2.
$$x(t+h)=x(t-h)+\frac{h}{3}[f(t-h,x(t-h)) + 4f(t,x(t))+f(t+h,x(t+h))]$$

4.
$$a=\frac{24}{13},\quad b=-\frac{11}{13},\quad c=\frac{2}{13},$$
$$d=\frac{10}{13},\quad e=-\frac{2}{39}h^2$$

5 . $a=1, b=c=\frac{h}{2}$; 오차항은 $O(h^3)$이다.

8. $\frac{\partial}{\partial s}x(9,s)=e^{252}\approx 10^{109}$

9. **(a)** 모든 t

(c) 양수 t

(e) 없다.

11. 모든 t에서 발산한다.

7.3 컴퓨터 연습문제

5. $x(\frac{1}{2})=2.25$

6. $x(-\frac{1}{2})=-4.5$

9. $y(e)=-6.38905\,60989$ 이때
$y(x)=[1-\ln v(x)]v(x)$

12. $0.21938\,39244$ **13.** $0.99530\,87432$

15. $\mathrm{Si}(1)=0.94608\,30703$

7.4 연습문제

1. $x(t+h) = x\left(1+\frac{1}{2}h^2+\frac{1}{24}h^4\right)+y\left(h+\frac{1}{6}h^3+\frac{1}{120}h^5\right)$

$y(t+h) = y\left(1+\frac{1}{2}h^2+\frac{1}{24}h^4\right)+x\left(h+\frac{1}{6}h^3+\frac{1}{120}h^5\right)$

2. 시스템이 결합되어 있지 않으므로, 두 분리된 문제를 푼다.

3. 시스템이 결합되어 있지 않으므로 각각의 미분방정식을 프로그램에 의해 개별적으로 푼다.

4. $\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 1 \\ x_1^2 + \log x_2 + x_0^2 \\ e^{x_2} - \cos x_1 + \sin(x_0 x_1) - (x_1 x_2)^7 \end{bmatrix},$

$\mathbf{X}(0) = [0, 1, 3]^T$

5. $\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ 2x_2 + \log x_3 + \cos x_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}(0) = [1, -3, 5]^T$

7. 시스템이 결합되어 있지 않으므로 각 방정식을 개별적으로 푼다.

8. $\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1\left(x_1^2 + x_3^2\right)^{-3/2} \\ x_4 \\ -x_3\left(x_1^2 + x_3^2\right)^{-3/2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.75 \\ 0.25 \\ 1.0 \end{bmatrix}$

9. $\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_4^2 + \cos(x_2 x_3) - \sin(x_0 x_1) + \log(x_1/x_0) \end{bmatrix},$

$\mathbf{X}(0) = [0, 1, 3, 4, 5]^T$

10. $\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ 2x_1 x_3 x_4 + 3x_1^2 x_2 t^2 \\ e^{x_2} x_5 + 4x_1 t^2 x_3 \\ 2t x_6 + 2t e^{x_1 x_3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}(1) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ -79/12 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

11. **(a)** $x_1 = x, x_2 = x', x_3 = x''$로 두자.

그러면 $\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ -x_3 \sin x_1 - t x_2 - x_3 \end{bmatrix}$

12. $\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 - x_1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{X}(0) = [0, 1]^T$

13. $x_0 = t, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = x', x_4 = y'$로 두자.

그러면 $\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 1 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + \log x_0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_0x_2 - \sin x_0 \end{bmatrix}$

$\mathbf{X}(0) = [0, 1, 3, 2, 4]^T$

7.4 컴퓨터 연습문제

1. $x(1) = 2.46869\,39399, \quad y(1) = 1.28735\,52872$

2. $x(0.38) = 1.90723 \times 10^{12}, y(0.38) = -8.28807 \times 10^4$

4. $x(-1) = 3.36788, \quad y(-1) = 2.36788$

5. $x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = x_4\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad x_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad x_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$

7. $x(6) = 4.39411, \quad y(6) = 3.10378$

7.5 연습문제

1. $x_j(t) = e^{\lambda_j t} x_j(0)$