

CHAPTER

1

서론

본 문서는 기계적(mechanical) 시스템을 제어함에 있어 필요한 지식을 도입진자를 예로 들어 설명한다. 다음과 같은 사항들이 관심사항이다.

- 어떻게 시스템을 모델링(modeling) 하는가?
- 제어기는 어떻게 설계하는가?
- 실제 제어기는 digital system을 통해 어떻게 구현되는가?
- 얻어진 데이터를 어떻게 PC로 옮겨갈 것인가?

본 문서는 모델링 및 제어 이론 이외에도 학생들의 이해를 돕기 위해 전자회로, microprocessor, programming 등의 다양한 분야에 대한 설명도 포함하고 있다.

도입진자는 제어를 공부하는 학부생 또는 석/박사 과정의 연구원들에게 제어의 개념을 전달하기 위해 사용되는 가장 대표적인 대상체이다. 그 이유는 다음과 같이 정리할 수 있다.

- 도입진자는 불안정(unstable) 시스템이다.

어렸을 때 하는 놀이중 막대를 손위에 올려놓고 쓰러지지 않게 하는 놀이가 있다. 만약에 손바닥에 올려놓고 그냥 바라만 보고 있다면 어떻게 될까? 그렇다. 막대는 쓰러지게 된다. 쓰러진다는 것이 곧 불안정함을 의미한다. 따라서 막대가 쓰러지지 않게 하기 위해 우리는 끊임없이 손바닥을 이리 저리 움직이며 균형을 유지하려고 애쓴다. 이런 과정이 다름아닌 제어에 해당한다. 물론 이것은 자동제어가 아니라 인간의 경험을 바탕으로 수행하는 수동제어에 해당한다.

- 도입진자는 비최소위상(non-minimum phase) 시스템이다.

이런 특성때문에 도입진자는 제어 강좌에서 제어의 기본 개념을 설명하는데 빠지지 않고 사용되는 전형적인 시스템이며 실제 제어를 구현하는 경험을 쌓는데 있어서도 도전해볼 만한 대상체라 할 수 있다.

CHAPTER

2

Single Inverted Pendulum

Nomenclature

M	cart의 질량
m	진자의 질량
θ	진자와 지면에 대한 법선이 이루는 각
x	cart의 중심점으로부터의 변위
F	cart에 가해지는 힘
b	cart와 트랙면과의 마찰계수
(x_G, y_G)	진자의 무게 중심의 위치
i_m	전류
V	모터에 인가되는 전압
r	모터축에 연결된 wheel의 반경
R_m	모터 전기자 저항
K_m	모터의 torque 상수
K_b	모터의 역기전력(back emf) 상수
K_g	gear ratio

1 Newton 역학을 이용한 모델 유도

1.1 비선형 모델

모터에 연결된 바퀴(wheel)이 회전하면서 지면을 밀고 이로 인해 추진력이 발생하는 cart 기반의 독립진자를 생각해 보자.

진자막대의 질량중심의 좌표는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{cases} x_G &= x + l \sin \theta \\ y_G &= l \cos \theta \end{cases}$$

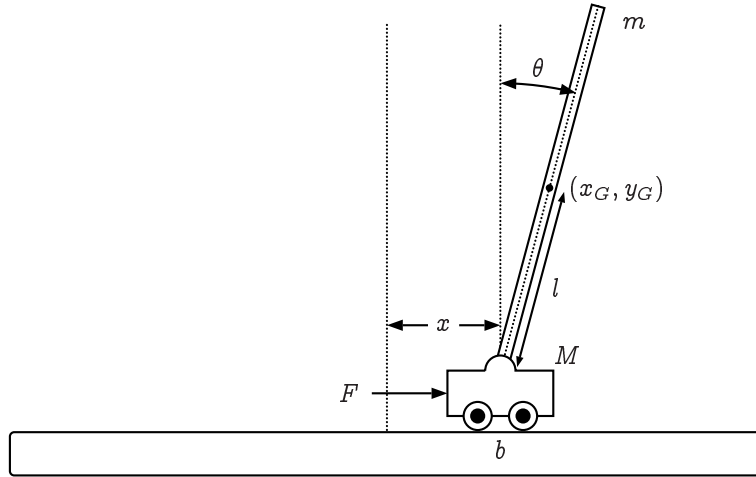


그림 2.1: 도립진자(inverted pendulum)

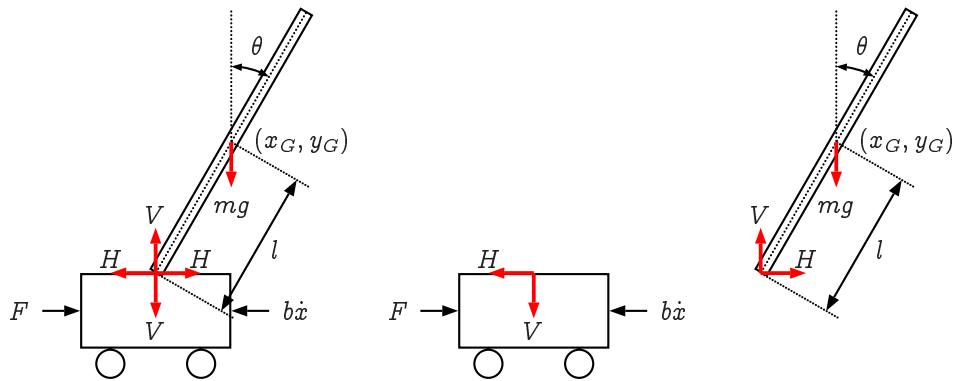


그림 2.2: 자유물체도(free-body diagram)

\dot{x}_G 와 \dot{y}_G 는 다음을 만족한다.

$$\begin{aligned}\dot{x}_G &= \dot{x} + l(\cos \theta)\dot{\theta} \\ \dot{y}_G &= -l(\sin \theta)\dot{\theta}\end{aligned}$$

그리고 \ddot{x}_G 와 \ddot{y}_G 가 다음을 만족한다.

$$\ddot{x}_G = \ddot{x} - l(\sin \theta)\dot{\theta}^2 + l(\cos \theta)\ddot{\theta} \quad (2.1)$$

$$\ddot{y}_G = -l(\cos \theta)\dot{\theta}^2 - l(\sin \theta)\ddot{\theta} \quad (2.2)$$

그림 2.2은 cart와 진자막대의 자유물체도를 나타내고 있다. 진자가 cart에 연결된 부분에서 발생하는 힘은 시스템 내부의 힘, 즉 내력이므로 모두 합산하면 $\mathbf{0}$ 이 된다. cart와 진자막대를 분리하여 각각 자유물체도를 그려보면 cart에서 고려해야 할 힘은 외부에서 가한 힘 F , 마찰력 $b\dot{x}$, 수평방향 힘 H 와 수직방향 힘 V 이다. 이 중에서 수직방향 힘은 지면에서 발생하는 반작용 힘의 의해 상쇄되므로 cart에서는 수평방향의 힘만 고려하면 된다. 따라서 cart의 수평운동은

$$M\ddot{x} = F - (H + b\dot{x}) \quad (2.3)$$

진자막대에 전달되는 힘은 진자막대의 수평 및 수직 운동과 회전운동을 발생시킨다. 진자막대 무게중심의 수평운동은

$$H = m\ddot{x}_G = m\ddot{x} - ml(\sin \theta)\dot{\theta}^2 + ml(\cos \theta)\ddot{\theta} \quad (2.4)$$

진자막대 무게중심의 수직운동은

$$V - mg = m\ddot{y}_G = -ml(\cos \theta)\dot{\theta}^2 - ml(\sin \theta)\ddot{\theta} \quad (2.5)$$

힘 V 와 H 에 의해 발생하는 무게 중심에 대한 진자막대의 회전운동은 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$I\ddot{\theta} = Vl \sin \theta - Hl \cos \theta \quad (2.6)$$

여기서 I 는 무게 중심에 대한 봉의 관성모멘트(mass moment of inertia)이다. 식 (2.4)와 (2.5)를 (2.6)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + ml(\cos \theta)\ddot{x} = mgl \sin \theta \quad (2.7)$$

$H = m\ddot{x}_G$ 를 (2.3)에 대입하여 정리하면

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + m\ddot{x}_G = F \quad (2.8)$$

을 얻게 되고 다시 (2.1)의 \ddot{x}_G 를 (2.8)에 대입하면,

$$(M + m)\ddot{x} + ml(\cos \theta)\ddot{\theta} = -b\dot{x} + ml(\sin \theta)\dot{\theta}^2 + F \quad (2.9)$$

를 얻을 수 있다. 식 (2.7)와 (2.9)으로부터 다음 식을 얻게 된다.

$$\begin{bmatrix} ml \cos \theta & (I + ml^2) \\ (M + m) & ml \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mgl \sin \theta \\ -b\dot{x} + ml(\sin \theta)\dot{\theta}^2 + F \end{bmatrix}$$

따라서

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} ml \cos \theta & (I + ml^2) \\ (M + m) & ml \cos \theta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} mgl \sin \theta \\ -b\dot{x} + ml(\sin \theta)\dot{\theta}^2 + F \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\det(\Phi)} \begin{bmatrix} ml \cos \theta & -(I + ml^2) \\ -(M + m) & ml \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} mgl \sin \theta \\ -b\dot{x} + ml(\sin \theta)\dot{\theta}^2 + F \end{bmatrix} \end{aligned}$$

위의 식을 풀어서 정리하면

$$\ddot{x} = \frac{m^2 l^2 g(\sin \theta)(\cos \theta) - (I + ml^2) \left(-b\dot{x} + ml(\sin \theta)\dot{\theta}^2 + F \right)}{\det(\Phi)} \quad (2.10)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{-(M + m)mgl \sin \theta + ml(\cos \theta) \left(-b\dot{x} + ml(\sin \theta)\dot{\theta}^2 + F \right)}{\det(\Phi)} \quad (2.11)$$

이 되며, 이 때 $\det(\Phi)$ 는 다음과 같다.

$$\det(\Phi) = (ml \cos \theta)^2 - (I + ml^2)(M + m).$$

1.2 선형모델(Linear Model)

도립진자의 모델식은 비선형 미분방정식으로 표현된다. 일반적으로 잘 정립된 제어 이론들이 대부분 선형 시스템에 대한 것이므로 제어를 수행하기 위해서는 선형모델이 필요하다. 도립진자에는 $\theta = 0$ 과 $\theta = \pi$ 일 때 2개의 균형점(equilibrium point)이 존재하는데, $\theta = \pi$ 는 안정균형점인 반면 $\theta = 0$ 은 불안정 균형점에 해당한다. 도립진자의 제어 목적이 $\theta = 0$ 을 유지하는 것이므로 비선

형 식을 $\theta = 0$ 을 중심으로 선형화시킨 선형모델을 구해야 한다.

$\theta \approx 0$ 이면 다음과 같은 근사화(approximation)가 가능하다.

$$\sin \theta \approx \theta, \cos \theta \approx 1, \theta \dot{\theta}^2 \approx 0$$

따라서 (2.7)와 (2.9)가 다음과 같이 근사화 된다.

$$(2.7) \rightarrow (I + ml^2)\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mgl\theta$$

$$(2.9) \rightarrow (M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = -b\dot{x} + F$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} ml & (I + ml^2) \\ (M + m) & ml \end{bmatrix}}_{=\Phi} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mgl\theta \\ -b\dot{x} + F \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} &= \frac{1}{\det(\Phi)} \begin{bmatrix} ml & -(I + ml^2) \\ -(M + m) & ml \end{bmatrix} \begin{bmatrix} mgl\theta \\ -b\dot{x} + F \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\det(\Phi)} \begin{bmatrix} m^2 l^2 g \theta - (I + ml^2)(-b\dot{x} + F) \\ -(M + m)mgl\theta + ml(-b\dot{x} + F) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.12)$$

여기서

$$\det(\Phi) = (ml)^2 - (M + m)(I + ml^2)$$

상태변수를 다음과 같이 선정하자.

$$x_1 = x, x_2 = \theta, x_3 = \dot{x}, x_4 = \dot{\theta}$$

다음과 같은 선형시스템을 얻게 된다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & A_{32} & A_{33} & 0 \\ 0 & A_{42} & A_{43} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix} F \quad (2.13)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

여기서

$$\begin{aligned} A_{32} &= \frac{m^2 l^2 g}{\det(\Phi)}, \quad A_{33} = \frac{b(I + ml^2)}{\det(\Phi)}, \quad A_{42} = \frac{-(M + m)mgl}{\det(\Phi)}, \quad A_{43} = \frac{-mlb}{\det(\Phi)} \\ B_3 &= \frac{-(I + ml^2)}{\det(\Phi)}, \quad B_4 = \frac{ml}{\det(\Phi)} \end{aligned}$$

$I = 0$ 일 경우 $\det(\Phi) = -Mml^2$ 이므로 다음과 같이 단순화된다.

$$\begin{aligned} A_{32} &= -\frac{mg}{M}, \quad A_{33} = -\frac{b}{M}, \quad A_{42} = \frac{(M + m)g}{Ml}, \quad A_{43} = \frac{b}{Ml} \\ B_3 &= \frac{1}{M}, \quad B_4 = -\frac{1}{Ml} \end{aligned}$$

Remark 1 $I = 0$ 이라는 가정은 적당한 가정은 아니다. 관성모멘트가 0이 되기 위해서는 pendulum의 질량이 0이어야 하지만 실제로 pendulum의 가정은 0이 아니다. 하지만 $I = 0$ 으로 가정하고 얻은 모델은 선형모델을 간결하게 정리할 수 있는 장점이 있고 견실한 제어기법을 적용할 경우에는, 제어기 설계에도 어느 정도 수준까지는 사용할 수 있다. 하지만 제어성능의 질을 높이기 위해서는 권장되는 가정은 아니다.

2 Lagrange 역학을 이용한 모델 유도

Lagrange 역학의 핵심은 다음 식으로 표현된다.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

여기서

L : Lagrangian $L = K - P$

q_j : 일반화 좌표변수

K : 운동에너지

P : 위치에너지

D : 감쇠에너지

Q_j : q_j 에 대응하는 비보존(nonconservative) 일반화된 힘(generalized force)

Remark 2 여기서 K, P, D 는 모두 일반화 좌표변수 q_j 의 함수로 표시되어야 한다.

Remark 3 일반화된 힘이란 일반화된 좌표에 작용하는 외력. 일반화된 좌표가 병진운동일 경우에는 힘(force), 회전운동일 경우에는 토크(torque).

운동에너지와 감쇠에너지는 다음과 같다.

- (강체의) 운동에너지 K

$$K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Iw^2 \quad (2.15)$$

m : 질량, I : 관성모멘트, v : 속도, w : 각속도

- 감쇠에너지 D

$$D = \frac{1}{2}bv^2 \left(+ \frac{1}{2}c\dot{\theta}^2 \right)$$

b : 점성마찰계수(viscous friction coefficient), v : 속도

이제 위에서 정리한 Langrange 역학을 이용하여 도립진자의 모델식을 다시 한번 유도해 보자. K_C 를 cart의 운동에너지, K_P 를 pendulum의 운동에너지라고 하자. 도립진자 시스템 전체의 운동에너지는

$$\begin{aligned} K_C &= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 \\ K_P &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2}m[(\dot{x} + l(\cos \theta)\dot{\theta})^2 + (-l(\sin \theta)\dot{\theta})^2] + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2}m[\dot{x}^2 + l^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 + 2\dot{x}l(\cos \theta)\dot{\theta} + l^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2] + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2}m[\dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 2\dot{x}l(\cos \theta)\dot{\theta}] + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

따라서

$$K = K_C + K_P = \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + m\dot{x}l(\cos \theta)\dot{\theta} + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$$

pendulum의 위치 에너지는

$$P = mgl(\cos \theta + 1)$$

감쇠에너지 D 는 다음과 같다.

$$D = \frac{1}{2}b\dot{x}^2 \left(+ \frac{1}{2}c\dot{\theta}^2 \right)$$

따라서 Lagrangian은 다음과 같게 된다.

$$L = K - P = \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + m\dot{x}l(\cos \theta)\dot{\theta} + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - mgl(\cos \theta + 1)$$

위의 Lagrangian에 대하여 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= (M + m)\dot{x} + ml(\cos \theta)\dot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= (I + ml^2)\dot{\theta} + m\dot{x}l(\cos \theta) \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -m\dot{x}l(\sin \theta)\dot{\theta} + mgl(\sin \theta)\end{aligned}$$

또한 D 에 대해서는 다음이 성립한다.

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = b\dot{x}$$

따라서

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = (M + m)\ddot{x} - ml(\sin \theta)\dot{\theta}^2 + ml(\cos \theta)\ddot{\theta} + b\dot{x} = F \quad (2.16)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = (I + ml^2)\ddot{\theta} + m\ddot{x}l(\cos \theta) - mgl(\sin \theta) = 0 \quad (2.17)$$

위의 결과는 Newton 역학을 이용하여 유도한 모델식과 같다.

• Servo motor를 구동기로 사용하는 경우에 대한 고찰

일부 논문에서는 구동기를 servo motor를 사용하는 경우가 있다. 이 경우는 cart의 질량같은 것은 모두 무시될 수 있다. 왜냐하면 servo motor가 cart의 질량이 얼마가 되든 이에 관계없이 속도 또는 가속도 reference를 추종할 수 있다고 보기 때문이다. 이 경우 식 (2.16)은 사라지고 그 대신

$$\ddot{x} = u$$

라는 식으로 대치된다. 제어입력이 가속도가 되고, cart의 병진운동 방정식이 cart의 질량이나 pendulum의 상태에 관계없이 servo motor가 정확하게 가속도 제어를 할 수 있다고 보는 것이다. 이 경우 운동방정식은

$$\ddot{x} = u$$

$$\ddot{\theta} = \frac{mgl \sin \theta}{\bar{I}} - \frac{ml \cos \theta}{\bar{I}} u$$

상태방정식으로 나타낼 경우 $x_1 = x, x_2 = \theta, x_3 = \dot{x}, x_4 = \dot{\theta}$ 라고 할 경우 비선형 식은

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ 0 \\ \frac{mgl \sin x_2}{\bar{I}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{ml \cos x_2}{\bar{I}} \end{bmatrix} u$$

그리고 선형 상태방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mgl}{\bar{I}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{ml}{\bar{I}} \end{bmatrix} u$$

3 동력전달 방식에 따른 Model 유도

도립진자의 cart에 동력을 전달하는 방식은 크게 3가지로 분류할 수 있다.

- Spur gear와 rack gear를 이용한 방식
- Timing pulley와 timing belt를 이용한 방식
- Ball screw를 이용한 방식

따라서 어떤 종류의 동력 전달 방식을 채택하느냐에 따라서 도립진자의 모델식은 조금씩 다르다. 본 교재에서는 각 동력 전달방식에 따른 모델 유도과정을 자세하게 정리해 본다.

4 Spur Gear 형태의 동력전달

도립진자의 cart에 장착된 바퀴가 spur gear 형태이고 지면이 rack gear 형태로 되어 있는 방식을 먼저 다루어 보자. 대표적인 제품으로는 Canada의 Quanser사에서 판매하는 swing-up 도립진자가 이 방식에 해당된다. 그림 2.3을 참조하라.

앞에서 유도한 도립진자의 모델식은 힘 F 를 제어입력으로 보고 유도한 모델이다. 하지만 대부분의 도립진자가 모터를 구동기로 사용하기 때문에 모터의 입력인 전압 V 를 제어입력으로 모델을 다시 유도할 필요가 있다.

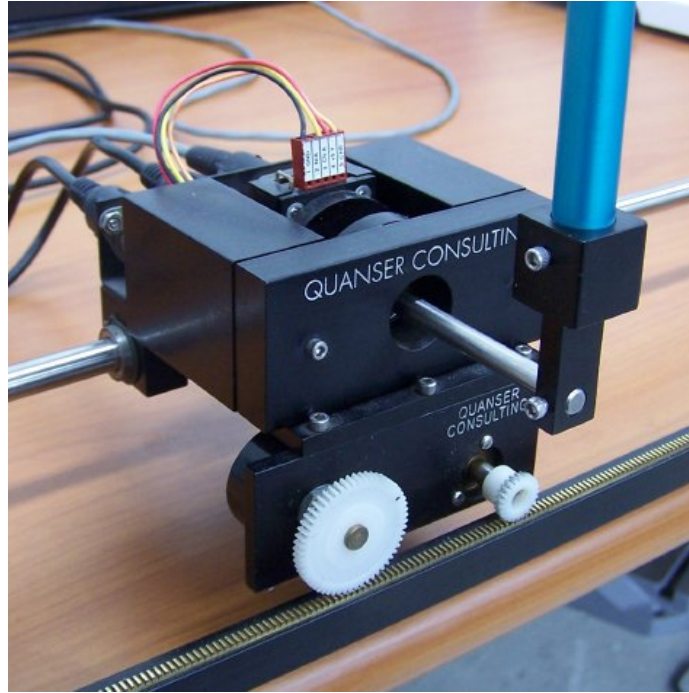


그림 2.3: Qunaser 사의 swing-up 도립진자

4.1 Motor Dynamics를 이용한 힘(F)과 전압(V)과의 관계

모터에 의하여 발생하는 torque는

$$T_m = K_m i_m,$$

즉 계자 권선에 흐르는 전류 i_m 에 비례한다. 기어비가 K_g 인 gear box를 사용할 경우 gear box를 거친 후에 발생하는 torque를 T 라 했을 때 T 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T = K_g T_m = K_g K_m i_m$$

gear box에 연결된 바퀴(wheel)의 반경을 r 이라고 하면 모터가 바퀴를 통해 지면을 미는 힘 F 는 다음과 같이 정리된다.

$$F = \frac{T}{r} = \frac{K_g T_m}{r} = \frac{K_g K_m i_m}{r} \quad (2.18)$$

i_m 과 V 와의 관계식을 알 수 있다면 결과적으로 F 와 V 의 관계도 구할 수 있게 된다. i_m 과 V 의 관계식은 다음과 같은 과정을 통해 유도할 수 있다. 먼저 계자 권선의 inductance를 무시했을 때 다음의 식이 성립한다.

$$i_m R_m + K_b \omega_m = V$$

즉, 다음과 같다.

$$i_m = \frac{V - K_b w_m}{R_m}. \quad (2.19)$$

여기서 w_m 은 모터의 각속도이다. 그런데, 모터의 각속도 w_m 을 cart의 변위 x 이용하여 표현이 가능하다. 기어비가 K_g 인 gear box를 거친후의 각속도를 w 라고 하면

$$w = \frac{w_m}{K_g}$$

가 성립한다. w 와 cart의 이동속도는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$rw = \dot{x} \rightarrow w = \frac{\dot{x}}{r} \rightarrow w_m = K_g \frac{\dot{x}}{r}$$

이것을 (2.19)에 대입하면

$$i_m = \frac{V - K_b K_g \frac{\dot{x}}{r}}{R_m} \quad (2.20)$$

(2.20)를 (2.18)에 대입하면, 모터에 의해 cart에 전달되는 힘 F 는 다음의 식이 된다.

$$F = \frac{K_m K_g}{R_m r} V - \frac{K_m K_b K_g^2}{R_m} \frac{\dot{x}}{r^2} \quad (2.21)$$

$K_m = K_b$ 이므로 다시 위의 식은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$F = \frac{K_m K_g}{R_m r} V - \frac{K_m^2 K_g^2}{R_m} \frac{\dot{x}}{r^2} \quad (2.22)$$

4.2 비선형 모델

(2.10)와 (2.11)에 위에서 구한 (2.22)를 대입하면

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{m^2 l^2 g (\sin \theta) (\cos \theta) - (I + ml^2) \left(-b\dot{x} + ml(\sin \theta)\dot{\theta}^2 + \frac{K_m K_g}{R_m r} V - \frac{K_m^2 K_g^2}{R_m} \frac{\dot{x}}{r^2} \right)}{\det(\Phi)} \\ \ddot{\theta} &= \frac{-(M + m) m g l \sin \theta + ml(\cos \theta) \left(-b\dot{x} + ml(\sin \theta)\dot{\theta}^2 + \frac{K_m K_g}{R_m r} V - \frac{K_m^2 K_g^2}{R_m} \frac{\dot{x}}{r^2} \right)}{\det(\Phi)} \end{aligned}$$

여기서

$$\det(\Phi) = (ml \cos \theta)^2 - (I + ml^2)(M + m).$$

Remark 4 swing-up 도립진자를 swing-up 하기 위해서는 energy control이라는 제어방식을 사용한다. energy control에서는 cart의 가속도, 즉 \ddot{x} 를 제어입력으로 간주하고 control law를 생성한다.

하지만 실제의 제어 입력은 모터에 인가되는 전압 V 이므로 \ddot{x} 와 V 의 관계를 알아야 한다. \ddot{x} 를 만들기 위한 전압 V 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\ddot{x} = \frac{\Lambda_1 - \Lambda_2(\Lambda_3 + \Lambda_4 V)}{\det(\Phi)}$$

여기서

$$\begin{aligned}\Lambda_1 &= m^2 l^2 g (\sin \theta) (\cos \theta) \\ \Lambda_2 &= (I + ml^2) \\ \Lambda_3 &= -b\dot{x} + ml(\sin \theta)\dot{\theta}^2 - \frac{K_m^2 K_g^2}{R_m} \frac{\dot{x}}{r^2} \\ \Lambda_4 &= \frac{K_m K_g}{R_m r}\end{aligned}$$

$$V = \frac{\det(\Phi)\ddot{x} - \Lambda_1 + \Lambda_2\Lambda_3}{-\Lambda_2\Lambda_4}$$

4.3 선형 모델

(2.12)에 (2.22)를 대입하면

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(\Phi)} \begin{bmatrix} m^2 l^2 g \theta - (I + ml^2) \left(-b\dot{x} + \frac{K_m K_g}{R_m r} V - \frac{K_m^2 K_g^2}{R_m} \frac{\dot{x}}{r^2} \right) \\ -(M + m)mgl\theta + ml \left(-b\dot{x} + \frac{K_m K_g}{R_m r} V - \frac{K_m^2 K_g^2}{R_m} \frac{\dot{x}}{r^2} \right) \end{bmatrix}$$

여기서

$$\det(\Phi) = (ml)^2 - (M + m)(I + ml^2)$$

상태변수가

$$x_1 = x, \quad x_2 = \theta, \quad x_3 = \dot{x}, \quad x_4 = \dot{\theta}$$

일 때, 다음과 같은 선형모델을 얻게 된다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & A_{32} & A_{33} & 0 \\ 0 & A_{42} & A_{43} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix} V$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

여기서

$$\begin{aligned} A_{32} &= \frac{m^2 l^2 g}{\det(\Phi)}, & A_{33} &= \frac{(I + ml^2) \left(b + \frac{K_m^2 K_g^2}{R_m r^2} \right)}{\det(\Phi)} \\ A_{42} &= \frac{-(M + m) m g l}{\det(\Phi)}, & A_{43} &= \frac{-ml \left(b + \frac{K_m^2 K_g^2}{R_m r^2} \right)}{\det(\Phi)} \\ B_3 &= \frac{-(I + ml^2) \left(\frac{K_m K_g}{R_m r} \right)}{\det(\Phi)}, & B_4 &= \frac{ml \left(\frac{K_m K_g}{R_m r} \right)}{\det(\Phi)} \end{aligned}$$

$I = 0$ 일 경우 $\det(\Phi) = -Mml^2$ 이므로 다음과 같이 단순화 된다.

$$\begin{aligned} A_{32} &= -\frac{mg}{M}, & A_{33} &= -\frac{\left(b + \frac{K_m^2 K_g^2}{R_m r^2} \right)}{M}, & A_{42} &= \frac{(M + m)g}{Ml}, & A_{43} &= \frac{\left(b + \frac{K_m^2 K_g^2}{R_m r^2} \right)}{Ml}, \\ B_3 &= \frac{\left(\frac{K_m K_g}{R_m r} \right)}{M}, & B_4 &= -\frac{\left(\frac{K_m K_g}{R_m r} \right)}{Ml} \end{aligned}$$

4.4 Quanser의 Swing-up pendulum 모델

Quanser에서 제작한 swing-up pendulum은 Micromotor사의 DC 모터 2338S006S (정격:6[V])를 사용하고 series 23/1 planetary gearhead를 사용하고 있다. series 23/1은 다양한 기어비 K_g 를 갖는데 그중에서 $K_g = 3.71$ 을 사용하고 있다. 모터의 parameter는

$$\text{http://www.micromo.com}$$

에 link된 data sheet를 통해 구할 수 있는데, 다음과 같은 값을 가진다.

$$\begin{aligned} R_m &= 2.6 [\Omega] \\ K_m &= 7.68 \times 10^{-3} [\text{Nm/A}] \\ K_g &= 3.71 \end{aligned}$$

물리적인 parameter는 다음과 같다.

$$M = 0.894 [\text{Kg}]$$

$$\begin{aligned}
m &= 0.23 \text{ [Kg]} \\
l &= 0.305 \text{ [m]} \leftarrow (\text{전체 길이} = 0.64 \text{ [m]} \text{ 로 비대칭 임, 반지름} = 0.0064 \text{ [m]}) \\
g &= 9.81 \\
r &= 0.0254/4 = 0.0635 \text{ [m]} \\
I &= 0.007853
\end{aligned}$$

Remark 5 data sheet에는 역기전력 상수 K_b 가 주어지는데 $K_m = K_g$ 인 관계를 이용하여 K_m 을 얻게 된다. 또한 단위가 $[\text{mV/rpm}]$ 으로 주어지는데 이것을 $[\text{mV/rad s}^{-1}]$ 로 변환해 주어야 한다. data sheet에 주어진 원래 값은 $K_b = 0.804 \text{ [mV/rpm]}$ 이다. 단위 변환은 다음과 같다.

$$K_b = \frac{0.804 \times 60}{2\pi} [\text{mV/rad}] = K_m = \frac{0.804 \times 60}{2\pi} [\text{mNm/A}]$$

따라서

$$K_m = 7.68 \times 10^{-3} [\text{Nm/A}]$$

Remark 6 식 (4.10)에 의하면 원기둥 모양을 갖는 봉의 moment of inertia를 다음과 같이 계산하였다.

$$I = \frac{1}{4} \times 0.23 \times 0.0064^2 + \frac{1}{12} \times 0.23 \times 0.64^2 = 0.007853$$

일반적으로 아주 무거운 봉을 쓰지 않는 이상 pendulum의 moment of inertia는 위의 예와 같이 매우 작은 값을 갖는다. 따라서 $I = 0$ 로 가정하는 경우가 흔히 있다.

4.5 Unforced System Simulation

Matlab, Simulink를 이용하여 도립진자에 대한 모의실험을 수행함으로써 도립진자의 응답형태를 살펴볼 수 있다. 여기서는 Quanser 도립진자 모델을 이용한 unforced system simulation을 수행해 보기로 한다. 즉 제어를 하지 않은 상태에서 pendulum이 어떠한 응답을 나타내는지를 살펴본다.

초기치를 $x(0) = [0 \ 0.05 \ 0 \ 0]^T$ 로 설정했을 때의 비선형 simulation 결과는 다음과 같다. 시간이 흐름에 따라 pendulum은 아래 방향을 향하게 되어 $\theta \rightarrow \pi$ 이 되고 cart의 변위는 $x \rightarrow 0$ 이 된다. pendulum이 무한히 진동하지 않는 이유는 pendulum이 가지고 있는 처음에 위치 에너지 형식으로 가지고 있던 에너지가 cart를 앞, 뒤로 움직이면서 일을 하기 때문에 조금씩 빠져 나가기 때문이다. 만약 cart가 완전히 고정되어 있는 상태라면 cart에 아무런 일도 하지 않게 되어 에너지가 계속 보존이 되므로 pendulum은 무한히 진동하는 운동을 할 것이다.

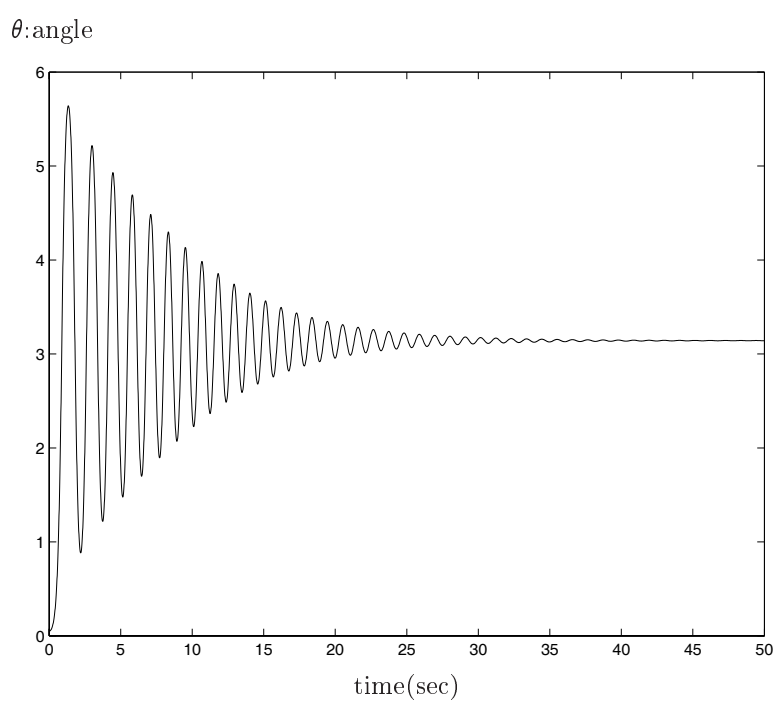


그림 2.4: Angle

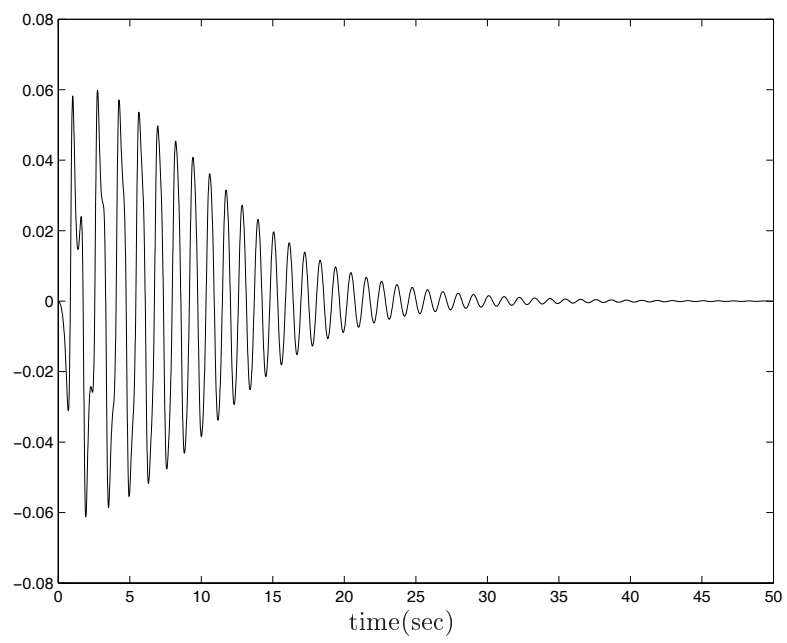
x :displacement

그림 2.5: displacement

Remark 7

$$\bar{I} = I + ml^2$$

이라고 하자. \bar{I} 는 pendulum의 moment of inertia를 구할 때 회전축을 무게 중심이 아니라 pivot으로 볼 때의 moment of inertia에 해당한다. 따라서 (2.7)는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\bar{I}\ddot{\theta} + ml(\cos \theta)\ddot{x} - mgl \sin \theta = 0$$

여기서 θ 는 upright position을 기준으로 작성한 값이다. 이것을 다시 downward position을 기준으로 본 각 $\bar{\theta}$ 로 다시 써보면

$$\theta = -\pi + \bar{\theta}$$

즉

$$\bar{I}\ddot{\bar{\theta}} + ml \cos(-\pi + \bar{\theta})\ddot{x} - mgl \sin(-\pi + \bar{\theta}) = 0$$

$\ddot{x} = 0$ 이고 $\bar{\theta}$ 를 매우 작다고 가정하면 다음과 같은 미분 방정식을 얻게 된다.

$$\bar{I}\ddot{\bar{\theta}} + mgl\bar{\theta} = 0$$

$$\ddot{\bar{\theta}} = \alpha e^{\lambda t}$$

$$\alpha(I\lambda^2 + mgl)e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{mgl}{\bar{I}}} \times i$$

따라서 주파수가 $\sqrt{\frac{mgl}{\bar{I}}}$ 인 정현파를 해로 갖게 된다. 즉 downward position을 중심으로 미소하게 흔들리는 진자의 주파수가 $\sqrt{\frac{mgl}{\bar{I}}}$ 가 된다는 말이다.

5 Timing pulley를 통한 동력전달

5.1 힘 F 와 전압 V 와의 관계

모터의 inertia를 I_m , 모터의 마찰상수를 B_m 이라고 하자. 모터에 의해 발생하는 토크를 T_m , 그리고 외부 부하에 전달되는 토크를 T 라고 하면 다음과 같은 식이 성립한다.

$$I_m\ddot{\theta}_m + B_m\dot{\theta}_m + T = T_m$$

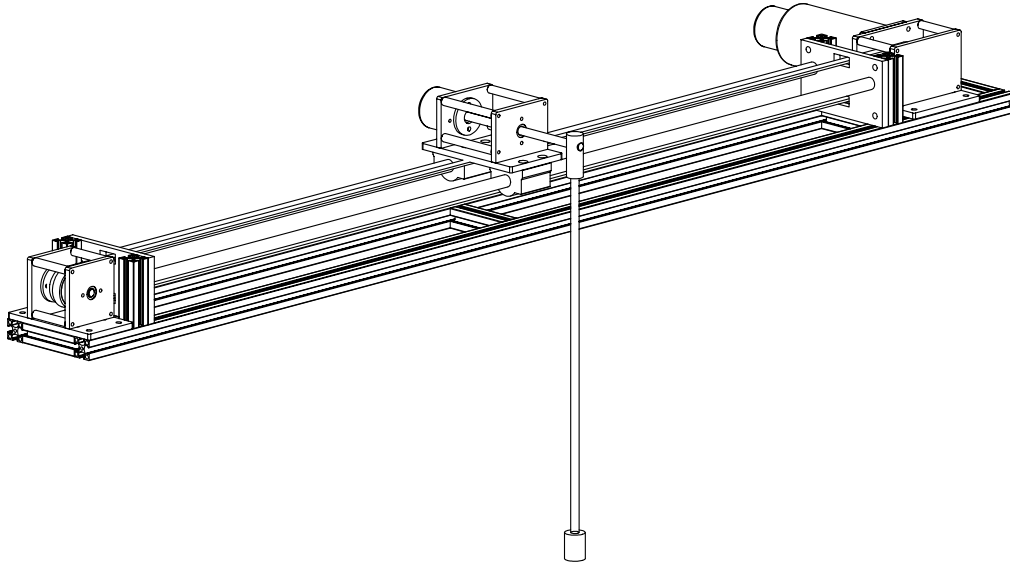


그림 2.6: Timing pulley 방식의 도립진자 (개념도)

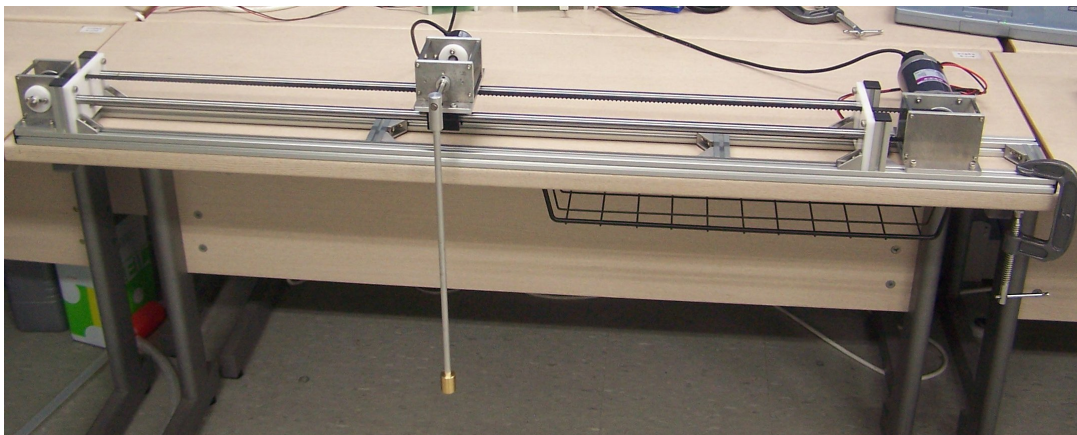


그림 2.7: Timing pulley 방식의 도립진자 (실제사진)

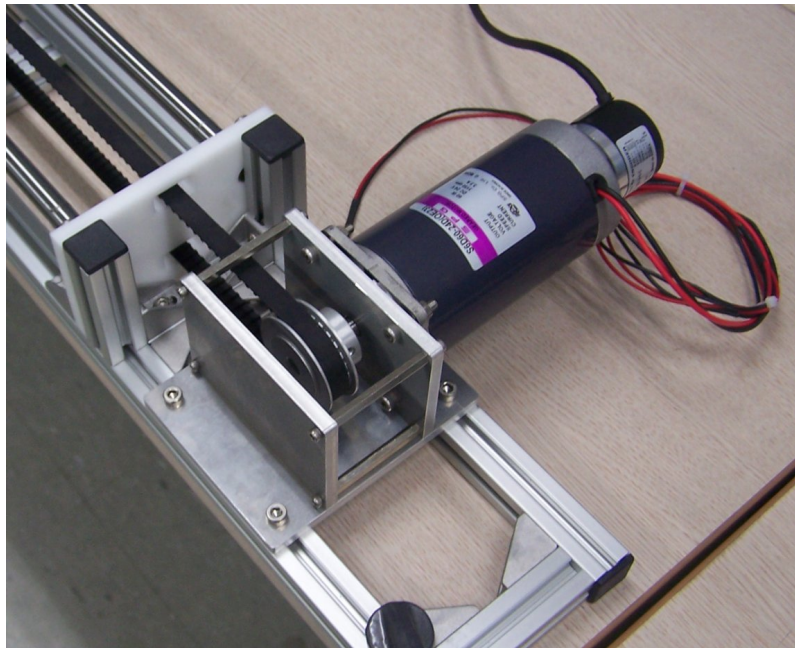


그림 2.8: 모터와 timing pulley 연결부

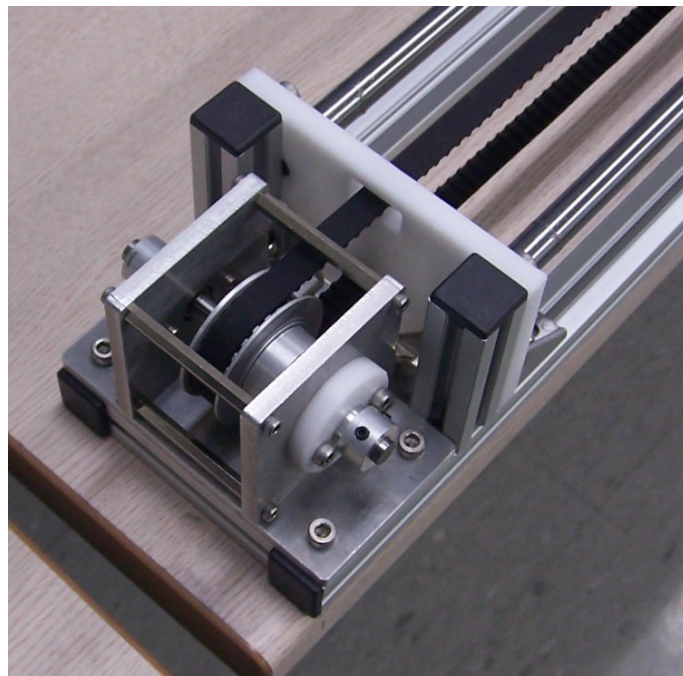


그림 2.9: idler

여기서 $T_m = K_m i_m$ 이고 $i_m = \frac{V - K_b \dot{\theta}_m}{R_m}$ 이므로

$$\begin{aligned}
 T &= -I_m \ddot{\theta}_m - B_m \dot{\theta}_m + T_m \\
 &= -I_m \ddot{\theta}_m - B_m \dot{\theta}_m + K_m \left(\frac{V - K_b \dot{\theta}_m}{R_m} \right) \\
 &= -I_m \ddot{\theta}_m - \left(B_m + \frac{K_m K_b}{R_m} \right) \dot{\theta}_m + \frac{K_m}{R_m} V
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

r 을 timing pulley의 피치반경이라고 하면 변위 x 와 모터의 회전각 θ_m 의 관계는

$$r \dot{\theta}_m = \dot{x} \quad \rightarrow \quad \dot{\theta}_m = \frac{\dot{x}}{r}, \quad \ddot{\theta}_m = \frac{\ddot{x}}{r} \tag{2.24}$$

그리고 $T = rF$ 이므로 (2.24)을 (2.23)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 관계식을 얻게 된다.

$$F = - \left(\frac{I_m}{r^2} \right) \ddot{x} - \left(\frac{B_m + \frac{K_m K_b}{R_m}}{r^2} \right) \dot{x} + \left(\frac{K_m}{R_m r} \right) V \tag{2.25}$$

여기서 만약 모터의 inertia인 I_m 과 마찰 상수 B_m 을 무시할 수 있다고 가정하면 다음과 같이 간략화 할 수 있다.

$$F = - \frac{K_m K_b}{R_m r^2} \dot{x} + \left(\frac{K_m}{R_m r} \right) V$$

Remark 8 timing pulley에 의한 동력전달은 감속비가 1 : 1인 모터를 사용한 spur gear 방식의 동력전달과 힘 F 의 식이 같다는 것을 알 수 있다. 식 (2.21)를 보면 쉽게 이해할 수 있다.

5.2 비선형 모델

(2.25)를 식 (2.9)에 대입하면 timing pulley 방식의 동력전달을 채택한 도립진자의 비선형 방정식은 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned}
 ml(\cos \theta) \ddot{x} + (I + ml^2) \ddot{\theta} &= mgl \sin \theta \\
 \left(M + m + \frac{I_m}{r^2} \right) \ddot{x} + ml(\cos \theta) \ddot{\theta} &= - \left(b + \frac{B_m + \frac{K_m K_b}{R_m}}{r^2} \right) \dot{x} \\
 &\quad + ml(\sin \theta) \dot{\theta}^2 + \left(\frac{K_m}{R_m r} \right) V
 \end{aligned}$$

위 식을 정리해 \ddot{x} 와 $\ddot{\theta}$ 를 구해보면

$$\ddot{x} = \frac{m^2 l^2 g(\sin \theta)(\cos \theta) - \bar{I} \left(-\bar{b} \dot{x} + ml(\sin \theta) \dot{\theta}^2 + \frac{K_m}{R_m r} V \right)}{\det(\Phi)} \tag{2.26}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{-\bar{M}mgl \sin \theta + ml(\cos \theta) \left(-\bar{b}\dot{x} + ml(\sin \theta)\dot{\theta}^2 + \frac{K_m}{R_m r}V \right)}{\det(\Phi)} \quad (2.27)$$

여기서

$$\begin{aligned} \bar{I} &= I + ml^2 \\ \bar{b} &= b + \frac{B_m + \frac{K_m K_b}{R_m}}{r^2} \\ \bar{M} &= M + m + \frac{I_m}{r^2} \\ \det(\Phi) &= (ml \cos \theta)^2 - \bar{I}\bar{M} \end{aligned}$$

\ddot{x} 를 만들기 위한 전압 V 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\ddot{x} = \frac{\Lambda_1 - \Lambda_2(\Lambda_3 + \Lambda_4 V)}{\det(\Phi)}$$

여기서

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= m^2 l^2 g (\sin \theta) (\cos \theta) \\ \Lambda_2 &= \bar{I} \\ \Lambda_3 &= -\bar{b}\dot{x} + ml(\sin \theta)\dot{\theta}^2 \\ \Lambda_4 &= \frac{K_m}{R_m r} \end{aligned}$$

$$V = \frac{\det(\Phi)\ddot{x} - \Lambda_1 + \Lambda_2\Lambda_3}{-\Lambda_2\Lambda_4}$$

5.3 선형모델

선형모델은 $\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1$, $\theta \approx 0$, $\dot{\theta} \approx 0$ 을 식 (2.26)와 (2.27)에 적용하면 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{m^2 l^2 g \theta - \bar{I} \left(-\bar{b}\dot{x} + \frac{K_m}{R_m r}V \right)}{\det(\Phi)} \\ \ddot{\theta} &= \frac{-\bar{M}mgl\theta + ml \left(-\bar{b}\dot{x} + \frac{K_m}{R_m r}V \right)}{\det(\Phi)} \end{aligned}$$

여기서

$$\det(\Phi) = (ml)^2 - \bar{M}\bar{I}$$

상태변수가

$$x_1 = x, x_2 = \theta, x_3 = \dot{x}, x_4 = \dot{\theta}$$

일 때 다음과 같은 선형모델을 얻게 된다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & A_{32} & A_{33} & 0 \\ 0 & A_{42} & A_{43} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix} V$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

여기서

$$\begin{aligned} A_{32} &= \frac{m^2 l^2 g}{\det(\Phi)}, & A_{33} &= \frac{\bar{I} \bar{b}}{\det(\Phi)} \\ A_{42} &= \frac{-\bar{M} m g l}{\det(\Phi)}, & A_{43} &= \frac{-m l \bar{b}}{\det(\Phi)} \\ B_3 &= \frac{-\bar{I} \left(\frac{K_m}{R_m r} \right)}{\det(\Phi)}, & B_4 &= \frac{m l \left(\frac{K_m}{R_m r} \right)}{\det(\Phi)} \end{aligned}$$

5.4 모델 계수

$$\begin{aligned} M &= 711.6 \times 10^{-3} [\text{Kg}] \\ m &= 209 \times 10^{-3} [\text{Kg}] \\ l &= 325.57 \times 10^{-3} [\text{m}] \\ \bar{I} &= 26.71 \times 10^{-3} [\text{Kg m}^2] \\ r &= 19.4 \times 10^{-3} [\text{m}] \end{aligned}$$

여기서 \bar{I} 는 solidworks의 물성치 계산기능을 이용하여 구하였다. 사용한 모터는 DNJ에서 구매한 4 : 1 감속기어의 결합한 Coreless 모터이다. 감속비를 모두 고려한 모터의 모델계수는 측정을 통

표 2.1: 모터 권선저항 계산을 위한 측정값

V	I	R
1	0.43	2.325581
2	0.84	2.380952
2.9	1.25	2.32
4	1.7	2.352941
4.9	2.15	2.27907
5.8	2.52	2.301587
6.3	2.74	2.29927
평균 R		2.322772

해 다음과 같이 구하였다.

$$I_m \ddot{\theta}_m + \underbrace{\left(B_m + \frac{K_m K_b}{R_m} \right)}_{B_{eq}} \dot{\theta}_m = K_m \frac{V}{R_m}$$

$$\begin{aligned} \tau &= 0.022 \text{ [sec]} \\ I_m &= 0.00068 \text{ [Kgm}^2\text{]} \quad (= \tau B_{eq}) \\ B_{eq} &= 0.0308 \text{ [Kgm}^2\text{s/rad]}, \quad \left(= \frac{K_m}{R_m} \frac{V_{max}}{w_{max}} \right) \\ K_m &= 0.257 \text{ [Nm/A]} \\ R_m &= 2.32 \text{ [\Omega]} \end{aligned}$$

여기서 시정수 측정을 위한 data는 encoder를 부착한 후에 측정해서 무부하 최고 RPM인 856 [RPM]보다 약간 낮은 825 [RPM] 정도가 나왔다. 이를 이용해서 계산한 B_{eq} 는 아래와 같이 계산되었다.

$$B_{eq} = \frac{K_m}{R_m} \frac{V_{max}}{w_{max}} = \frac{0.257}{2.32} \times \frac{24}{\left(\frac{825}{60} \times 2\pi \right)}$$

위의 측정값은 표 2.1와 2.2에 주어진 측정값을 이용하여 계산하였다.

표 2.2: 모터 역기전력 계산을 위한 측정값

R	V	I	RPM	Kb
2.32	2	0.14	64	0.249953
2.32	4	0.17	135	0.255044
2.32	6	0.2	208	0.254158
2.32	8	0.225	277	0.257797
2.32	10	0.25	350	0.257013
2.32	15	0.3	529	0.25821
2.32	20	0.34	710	0.258385
2.32	24	0.37	856	0.258161
2.32	4	0.25	126	0.259195
2.32	7	0.295	234	0.257733
2.32	10	0.33	341	0.258598
2.32	15	0.39	522	0.257853
2.32	20	0.42	704	0.25807
2.32	24	0.44	848	0.258768
평균 Kb				0.257067

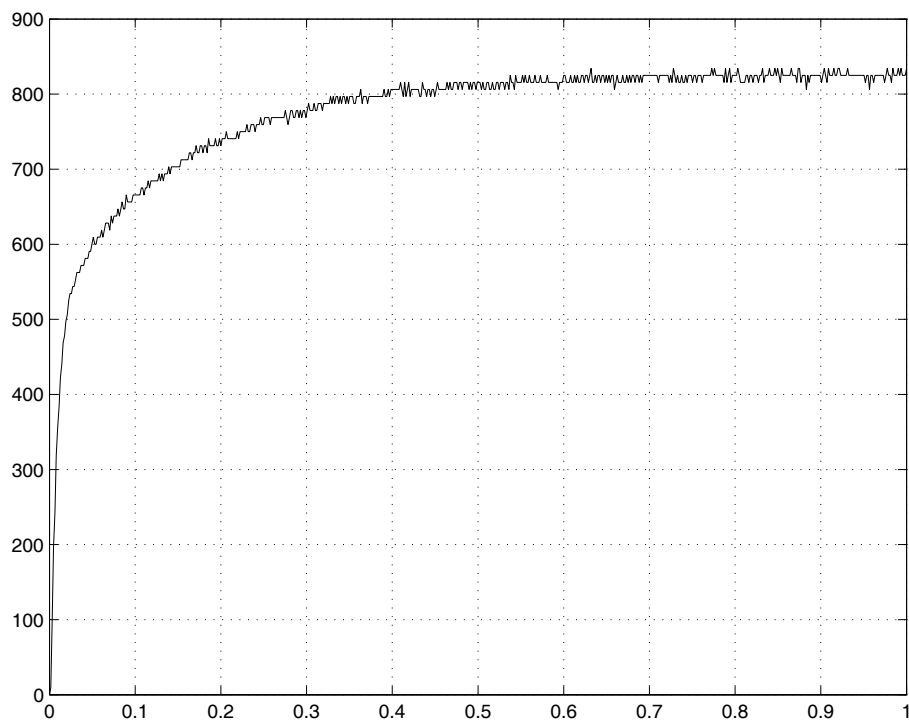


표 2.3: 모터 시정수 산정을 위한 그림

5.5 Swing-up control : 또다른 방법

- Lyapunov 함수

$$V = E_p^2 + \lambda x^2 + \gamma \dot{x}^2$$

- Energy 함수

$$E_p = \frac{1}{2} \bar{I} \dot{\theta}^2 + mgl(\cos \theta - 1)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{mgl}{\bar{I}} \sin \theta - \frac{ml}{\bar{I}} \ddot{x} \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= 2E_p \dot{E}_p + 2\lambda x \dot{x} + 2\gamma \dot{x} \ddot{x} \\ &= 2E_p (\bar{I} \dot{\theta} \ddot{\theta} - mgl \sin \theta \dot{\theta}) + 2\lambda x \dot{x} + 2\gamma \dot{x} \ddot{x} \\ &= 2E_p (mgl \dot{\theta} \sin \theta - ml \dot{\theta} \cos \theta \ddot{x} - mgl \sin \theta \dot{\theta}) + 2\lambda x \dot{x} + 2\gamma \dot{x} \ddot{x} \\ &= 2(\gamma \dot{x} - E_p ml \dot{\theta} \cos \theta) \ddot{x} + 2\lambda x \dot{x} \end{aligned}$$

$$\ddot{x} = \frac{u_a |E_p ml \dot{\theta} \cos \theta - \gamma \dot{x}| + \lambda x \dot{x}}{E_p ml \dot{\theta} \cos \theta - \gamma \dot{x}}$$

$$u = \begin{cases} \frac{u_a |E_p ml \dot{\theta} \cos \theta - \gamma \dot{x}| + \lambda x \dot{x}}{E_p ml \dot{\theta} \cos \theta - \gamma \dot{x}}, & |E_p ml \dot{\theta} \cos \theta - \gamma \dot{x}| > \epsilon \\ \frac{u_a |E_p ml \dot{\theta} \cos \theta - \gamma \dot{x}| + \lambda x \dot{x}}{\epsilon \operatorname{sgn}(E_p ml \dot{\theta} \cos \theta - \gamma \dot{x})}, & |E_p ml \dot{\theta} \cos \theta - \gamma \dot{x}| > \epsilon \end{cases}$$

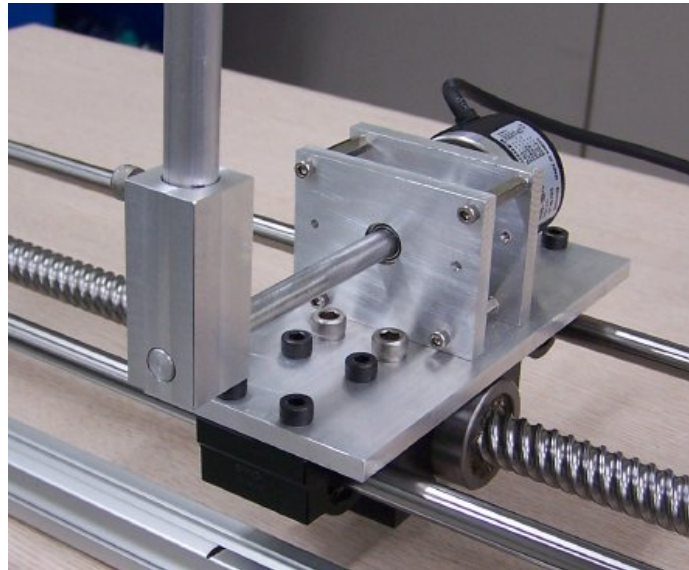


그림 2.10: Ball screw 방식의 도립진자

6 Ball screw를 통한 동력전달

그림 2.10는 ball screw를 이용하여 동력을 전달하는 방식의 도립진자를 보여주고 있다. Ball screw 방식은 spur gear 방식이나 timing belt 방식과 달리 정지 torque가 크다.

6.1 Ball screw에 관한 기초지식

ECL 도립진자에서 사용한 ball screw의 모델명은 (주)미래정공에서 판매하는 GTR-1620A으로 다음과 같은 사양을 갖는다. 관련 자료는 아래의 Web address로부터 구할 수 있다.

표 2.4: GTR-1620A의 사양

screw diameter	16 [mm]
lead	20 [mm]
root diameter	13.4 [mm]
ball diameter	3.175 [mm]

<http://www.ksbearing.co.kr>

ball screw와 관련된 정보는 다음 책자에서 살펴볼 수 있다.

- THK data sheet : D-20 ~ D-85

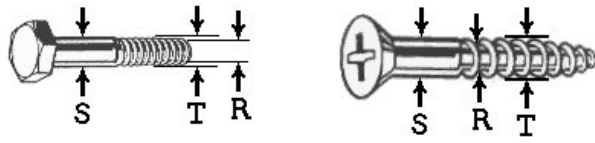


그림 2.11: 나사 직경의 종류

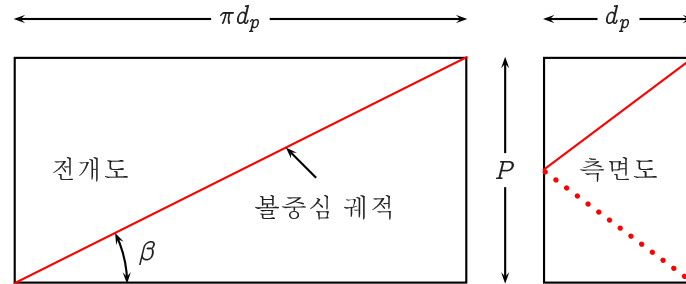


그림 2.12: 리드각의 의미

- Misumi data sheet : pp. 510-511, pp. 1805-1808

Screw의 직경

나사 또는 screw의 직경은 그림 2.11에서 설명하는 바와 같이 3가지로 분류할 수 있다.

- Thread diameter (T) : major diameter라고도 함
- Shank diameter (S)
- Root diameter (R) : minor diameter라고도 함

리드각

ball screw의 리드각 β 의 산출은 다음과 같다.

$$\tan \beta = \frac{P}{\pi d_p} \rightarrow \beta = \tan^{-1} \left(\frac{P}{\pi d_p} \right)$$

여기서 P 은 리드, β 는 리드각, d_p 는 볼 중심경이다. screw의 나사산을 따라서 bearing의 ball이 위치하게 회전하게 되는데, 이 ball의 중심은 나선형 궤적을 그리게 된다. 이 나선궤적을 위에서 바라보게 되면 원이 되는데 바로 이 원의 지름을 볼중심경이라 한다. 볼중심경은

$$\text{볼중심경}(d_p) = \text{root diameter} + \text{ball diameter}$$

으로 구할 수 있다. ECI 도립진자에서 사용한 GTR-1620A의 경우 볼 중심경은

$$\text{볼중심경} = 13.4 + 3.175 = 16.575 \text{ [mm]}$$

따라서 리드각 β 는

$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{l}{\pi d_p} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{20}{\pi \times 16.575} \right) = 0.3667 \text{ [rad]} = 21^\circ$$

Remark 9 ball screw에서 $\frac{1}{\tan \beta}$ 는 gear box에서 gear ratio와 유사한 역할을 한다. gear box의 경우 회전운동을 회전운동으로 변환시키지만 ball screw의 경우 회전운동을 직선운동으로 변환시키는 점이 차이점이다. gear ratio가 클 경우에는 입력축에 작은 torque를 가해 회전 시켜도 출력축에서 큰 torque를 얻을 수 있다. ball screw에서는 β 가 작을 경우 $\frac{1}{\tan \beta}$ 가 큰 값을 가지는데 이때는 screw에 작은 torque를 가해 회전시켜도 큰 직선 추력을 얻을 수 있게 된다.

Torque와 직선방향 추진력과의 관계

torque를 가했을 때 발생하는 유효추진력을 F_e 라 하면 T 와 F_e 는 다음의 관계가 성립한다.

$$F_e = \frac{2\pi\eta_1 T}{P}$$

여기서 η_1 은 효율, T 는 ball screw에 가해지는 torque, P 은 리드이다. $r_p = \frac{d_p}{2}$ 이고 $T_e = \eta_1 T$ 를 유효 torque라고 한다면

$$\tan \beta = \frac{P}{\pi d_p} = \frac{P}{2\pi r_p} \rightarrow \frac{2\pi}{P} = \frac{1}{r_p \tan \beta}$$

따라서

$$F_e = \left(\frac{1}{\tan \beta} \right) \times \frac{T_e}{r_p} \quad (2.28)$$

이것의 물리적 의미는 무엇일까? 그림 2.13을 이용하여 이것의 물리적 의미를 살펴보자. 어떤 회전축에 torque T_e 를 가했을 경우 축에 수직으로 달려있는 길이가 r_p 인 강체의 끝단에서 발생하는 접선방향의 힘을 F_r 라고 하자. F_r 의 크기는 당연히

$$F_r = \frac{T_e}{r_p} \quad (2.29)$$

이다. (2.29)을 (2.28)에 대입하면

$$F_e = \left(\frac{1}{\tan \beta} \right) \times F_r \quad (2.30)$$

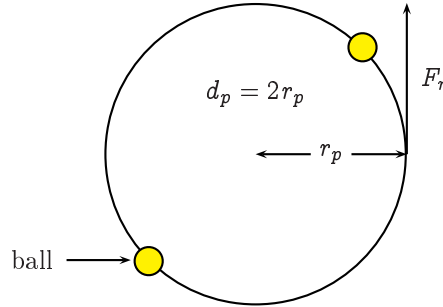


그림 2.13: Ball screw에서 torque와 추진력과의 관계

가 된다. (2.30)은 ball screw의 torque에 의해 발생하는 직선방향 추진력과 단순한 torque에 의해 발생하는 접선방향의 힘과의 관계를 나타내고 있다. 즉 ball screw에 torque에 의해 발생하는 직선방향 추진력과 F_r 과의 관계를 나타내고 있다. 이 식을 통해 $\beta = 45^\circ$ 일 경우 $\tan\beta = 1$ 이 되어 $F_e = F_r$ 이 됨을 알 수 있다. 즉 torque에 의해 발생하는 접선방향의 힘 F_r 이 그대로 직선방향 추진력 F 로 변환된다는 것을 의미한다. 만약에 리드각 β 가 45° 보다 작게 되면 $F > F_r$, 즉 접선방향 힘 F_r 보다 큰 추진력이 발생한다는 것이다. 반대로 $\beta > 45^\circ$ 일 경우에는 $F < F_r$ 이 성립한다. 이미 설명했듯이 여기서 $\frac{1}{\tan\beta}$ 는 gear box에서 gear ratio와 유사한 역할을 한다는 것을 알 수 있다. 반대로 추진력을 부여했을 때 발생하는 유효 torque, T_e 도 생각해 볼 수 있다. 이와 관련한 식은 다음과 같다.

$$T_e = \frac{P\eta_2 F}{2\pi}$$

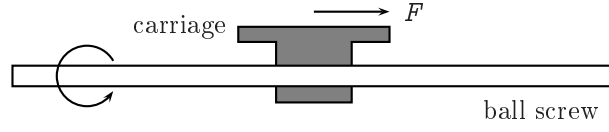
여기서 η_2 는 효율이다. $\eta_2 F$ 를 유효 추진력 F_e 라고 하고 $\frac{P}{2\pi} = r_p \tan\beta$ 를 이용하면

$$T_e = (\tan\beta) F_e r_p = (\tan\beta) T_r \quad (2.31)$$

여기서 $T_r = F_e r_p$ 로 길이 r_p 인 강체의 끝에 직각으로 힘 F_e 를 가했을 때 발생하는 torque이다. 식 (2.31)의 의미는 ball screw에 직선 추진력 F 를 가했을 경우 발생하는 torque는 유효추진력 F_e 를 길이가 r_p 인 강체에 가해 발생하는 torque에 리드각 β 의 \tan 값을 곱한 값이라는 것이다. 여기서는 리드각이 크면 클 수록 발생 torque가 커지고 리드각이 작을 수록 발생 torque가 작다는 것을 알 수 있다.

유효추진력 F_e 는 cart를 실제 움직이는데 사용되는 힘 F 와 마찰력 F_b 을 극복하기 위해 사용되는 힘과 실제 가속을 위해 사용되는 힘으로 나뉜다.

$$F_e = \frac{2\pi\eta_1 T}{P} = F + F_b$$



F_b 는 다음과 같이 모델링 할 수 있을 것으로 추정된다.

$$F_b = \begin{cases} \frac{2\pi\eta_1 T}{P} & \text{when } \dot{x} = 0 \text{ and } \left| \frac{2\pi\eta_1 T}{P} \right| \leq \mu Mg \\ \text{sgn}(T)\mu Mg & \text{when } \dot{x} = 0 \text{ and } \left| \frac{2\pi\eta_1 T}{P} \right| > \mu Mg \\ \text{sgn}(\dot{x})\mu Mg & \text{when } \dot{x} \neq 0 \end{cases}$$

여기서 x 는 ball screw에 장착된 cart의 직선변위이다. μ 는 마찰계수로서 0.05 ~ 0.2의 범위를 가지며 M 은 cart의 질량, g 는 중력가속도이다.

$$F = F_e - F_b = \frac{2\pi\eta_1 T}{P} - F_b$$

이 식에 의거하면 정지해 있는 cart를 가속도 $a > 0$ 로 가속운동 시키기 위해서 모터가 발생시켜야 하는 유효 추진력 F_e 는

$$F = Ma = F_e - F_b = F_e - \mu Mg \quad \rightarrow \quad F_e = Ma + \mu Mg$$

즉 마찰력을 이기기 위해 더 큰 추진력을 주어야 한다. 반대로 $\dot{x} > 0$ 으로 등속운동하는 상태에서 가속도를 $-a$ 로 하는 감속운동을 하려면

$$F = -Ma = F_e - F_b = F_e - \text{sgn}(\dot{x})Mg = F_e - \mu Mg \quad \rightarrow \quad F_e = -Ma + \mu Mg$$

즉 마찰력이 감속을 돕기 때문에 더 작은 힘으로도 감속이 가능하다.

Ball screw의 관성모멘트

ball screw 자체의 관성 모멘트를 I_B 라 하고 carriage에 대한 관성 모멘트를 I_C 라고 하자. carriage까지 포함한 전체 시스템에 대한 관성모멘트 I 는 다음과 같다.

$$I = I_B + I_C$$

Free body diagram을 이용하면

$$T = T_B + T_C$$

이고 T_B 는 다음을 만족한다.

$$T_B = I_B \ddot{\theta}$$

T_C 는 carriage에 가해지는 회전력인데 ball screw에 의해 이것은 직선방향 추진력 F 로 변환된다. 효율을 100%라고 했을 때 추진력 F 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$F = \frac{2\pi}{P} T_C \quad (2.32)$$

직선방향 추진력 F 는 Newton 역학에 의해

$$F = M \ddot{x} \quad (2.33)$$

이때 회전변위 θ 와 직선변위 x 의 관계를 이용하면 \ddot{x} 를 $\ddot{\theta}$ 에 관한 식으로 나타낼 수 있다.

$$x = \frac{\theta}{2\pi} P \rightarrow \ddot{x} = \frac{\ddot{\theta}}{2\pi} P$$

위의 식과 (2.32)와 (2.33)이 서로 같음을 이용하면

$$F = \frac{MP}{2\pi} \ddot{\theta} = \frac{2\pi}{P} T_C \rightarrow T_C = \frac{MP^2}{4\pi^2} \ddot{\theta}$$

따라서

$$T = T_B + T_C = \underbrace{\left(I_B + \frac{MP^2}{4\pi^2} \right)}_{=I} \ddot{\theta}$$

결국 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$I = I_B + \frac{MP^2}{4\pi^2}$$

6.2 전압 V 와 힘 F 의 관계

앞에서는 torque와 이에 의해 발생하는 직선방향 추진력과의 관계를 유도하였다. 하지만 도립진자를 제어하기 위해 필요한 모델은 모터의 입력인 전압 V 를 제어입력으로 사용하고 있는 모델이다. 따라서 여기서는 모터에 인가되는 전압 V 를 제어입력으로 하는 도립진자 모델을 정리해 보기로 한다.

모터 inductance를 무시할 경우 Kirchhoff 법칙에 의해

$$V = i_m R_m + K_b \frac{d\theta_m}{dt}$$

리드가 P 일 경우 모터의 회전 각변위와 cart의 직선 변위의 관계를 이용하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\Delta x = \left(\frac{P}{2\pi} \right) \Delta \theta_m \rightarrow \frac{d\theta_m}{dt} = \left(\frac{2\pi}{P} \right) \dot{x}$$

$K_m = K_b$ 이므로

$$V = i_m R_m + K_m \left(\frac{2\pi}{P} \right) \dot{x} \rightarrow i_m = \frac{V}{R_m} - K_m \frac{2\pi}{P R_m} \dot{x}$$

따라서 모터에 의해 발생하는 torque는

$$T = K_m i_m = \frac{K_m}{R_m} V - \frac{2\pi K_m^2}{P R_m} \dot{x} \quad [\text{Nm}] \quad (2.34)$$

torque와 cart에 전달되는 힘 F 의 관계는 앞에서 유도한바와 같이

$$F = \frac{2\pi \eta_1 T}{P} - F_b \quad (2.35)$$

이때

$$F_b = \begin{cases} \frac{2\pi \eta_1 T}{P} & \text{when } \dot{x} = 0 \text{ and } \left| \frac{2\pi \eta_1 T}{P} \right| \leq \mu M g \\ \text{sgn}(T) \mu M g & \text{when } \dot{x} = 0 \text{ and } \left| \frac{2\pi \eta_1 T}{P} \right| > \mu M g \\ \text{sgn}(\dot{x}) \mu M g & \text{when } \dot{x} \neq 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

Remark 10 Spur gear를 이용한 도립진자의 경우 전압과 힘과의 관계가 affine 한 관계를 가지므로 힘을 전압으로 나타낸 후 치환하여 사용하였다. 하지만 ball screw의 경우 마찰력이 비선형 요소를 가지므로 affine 관계를 얻을 수 없다. 따라서 ball screw 기반의 도립진자에서는 F 와 V 의 explicit한 관계를 사용하기 보다는 (2.34), (2.35), (2.36)를 이용하여 나타내야 한다.

Remark 11 여기서 $T = K_m i_m$ 로 설정하였는데, 이것은 motor에서 발생하는 torque가 전부 외부 부하에 전달된다는 가정하에 성립하는 것이다. 좀더 엄밀하게 말한다면 motor에 의해 발생한 torque는

$$J_m \ddot{\theta}_m + B_m \dot{\theta}_m + T_L = T = K_m i_m$$

이므로, 실제 외부로 전달되는 torque는 T_L 이 된다. 이렇게 하면 물론 식이 좀더 정확히 지기는 하지만 상태방정식의 차수가 커지는 단점이 있게 된다. 따라서 motor의 inertia나 마찰계수가 굉장

히 작다고 생각하고 발생 torque의 전부가 외부 부하를 구동하는데 사용된다고 가정한다.

마찰력까지 모두 고려한 식을 사용하면 물리 현상을 보다 정확하게 묘사할 수 있는 장점은 있지만 제어기 설계의 측면에서는 비선형성이 더 추가되므로 오히려 바람직하지 않을 수 있다. 여기서는 $F_b = 0$ 으로 가정하여 단순화된 모델을 유도해 본다.

(2.34)과 (2.35)으로부터 다음 관계식을 얻을 수 있다. 여기서 $\dot{x} = x_3$ 를 이용하였다.

$$F = \frac{2\pi\eta T}{P} = c_1 V - c_2 \dot{x} = c_1 V - c_2 x_3$$

여기서

$$c_1 = \eta \frac{2\pi K_m}{P R_m}, \quad c_2 = \eta \frac{4\pi^2 K_m^2}{P^2 R_m}$$

위의 결과를 이용하면 전압 V 가 제어입력인 비선형 모델은 다음과 같이 정리된다.

$$\ddot{x} = \frac{m^2 l^2 g(\sin \theta)(\cos \theta) - (I + ml^2) \left(-b\dot{x} + ml(\sin \theta)\dot{\theta}^2 - c_2 \dot{x} + c_1 V \right)}{\det(\Phi)} \quad (2.37)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{-(M + m)mgl \sin \theta + ml(\cos \theta) \left(-b\dot{x} + ml(\sin \theta)\dot{\theta}^2 - c_2 \dot{x} + c_1 V \right)}{\det(\Phi)} \quad (2.38)$$

이 때 $\det(\Phi)$ 는

$$\det(\Phi) = (ml \cos \theta)^2 - (I + ml^2)(M + m).$$

다음과 같이 정의해보자.

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= m^2 l^2 g(\sin \theta)(\cos \theta) \\ \Lambda_2 &= (I + ml^2) = \bar{I} \\ \Lambda_3 &= -(b + c_2)\dot{x} + ml(\sin \theta)\dot{\theta}^2 \\ \Lambda_4 &= c_1 \end{aligned}$$

cart의 고속도 \dot{x} 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{x} = \frac{\Lambda_1 - \Lambda_2(\Lambda_3 + \Lambda_4 V)}{\det \Phi}$$

이로부터 가속도 \ddot{x} 와 전압과의 관계를 구하면

$$V = \frac{\det(\Phi)\ddot{x} - \Lambda_1 + \Lambda_2 \Lambda_3}{-\Lambda_2 \Lambda_4}$$

선형 모델은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \bar{A}_{32} & \bar{A}_{33} & 0 \\ 0 & \bar{A}_{42} & \bar{A}_{43} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{B}_3 \\ \bar{B}_4 \end{bmatrix} V \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} \bar{A}_{32} &= A_{32}, \quad \bar{A}_{33} = A_{33} - B_3 c_2, \quad \bar{A}_{42} = A_{42}, \quad \bar{A}_{43} = A_{43} - B_4 c_2 \\ \bar{B}_3 &= B_3 c_1, \quad \bar{B}_4 = B_4 c_1 \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned} A_{32} &= \frac{m^2 l^2 g}{\det(\Phi)}, \quad A_{33} = \frac{b(I + ml^2)}{\det(\Phi)}, \quad A_{42} = \frac{-(M + m)mgl}{\det(\Phi)}, \quad A_{43} = \frac{-mlb}{\det(\Phi)} \\ B_3 &= \frac{-(I + ml^2)}{\det(\Phi)}, \quad B_4 = \frac{ml}{\det(\Phi)} \\ \det(\Phi) &= (ml)^2 - (M + m)(I + ml^2) \end{aligned}$$

6.3 또다른 유도

ball screw가 motor의 축에 직결연결되어 있다면 ball screw의 회전변위는 motor의 회전변위 θ_m 과 같고 이것은 cart의 직선변위와 다음의 관계가 있다.

$$\left(\frac{\theta_m}{2\pi} \right) P = x$$

$$\begin{aligned} K_C &= \frac{1}{2} M \dot{x}^2 = \frac{1}{2} M \left(\frac{P^2 \dot{\theta}_m^2}{4\pi^2} \right) \\ K_P &= \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2} m [(\dot{x} + l(\cos \theta) \dot{\theta})^2 + (-l(\sin \theta) \dot{\theta})^2] + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2} m [\dot{x}^2 + l^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 + 2\dot{x}l(\cos \theta) \dot{\theta} + l^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2] + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{P^2 \dot{\theta}_m^2}{4\pi^2} \right) + l^2 \dot{\theta}^2 + \left(\frac{P \dot{\theta}_m}{\pi} \right) l(\cos \theta) \dot{\theta} \right] + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \\ K_B &= \frac{1}{2} I_B \dot{\theta}_m^2 \end{aligned}$$

여기서 I_B 는 ball screw와 motor를 합친 강체의 관성모멘트이다.

따라서

$$K = K_C + K_P + K_B = \frac{1}{2} \underbrace{\left[I_B + \frac{(M+m)P^2}{4\pi^2} \right]}_{=\bar{I}_B} \dot{\theta}_m^2 + \frac{mP\dot{\theta}_m}{2\pi} l(\cos\theta)\dot{\theta} + \frac{1}{2} \underbrace{(I + ml^2)}_{=\bar{I}} \dot{\theta}^2$$

Remark 12 \bar{I}_B 는 motor 측에서 바라본 모터, ball screw, cart, pendulum 모두를 고려한 관성모멘트이다. 또한 \bar{I} 는 pendulum의 무게중심이 아니라 cart에 연결된 축(shaft)를 중심으로 계산한 관성모멘트이다.

pendulum의 위치 에너지는

$$P = mgl(\cos\theta + 1)$$

감쇠에너지 D 는 다음과 같다.

$$D = \frac{1}{2}b\dot{x}^2 = \frac{1}{2}b \left(\frac{P^2\dot{\theta}_m^2}{4\pi^2} \right)$$

따라서 Lagrangian은 다음과 같게 된다.

$$L = K - P = \frac{1}{2}\bar{I}_B\dot{\theta}_m^2 + \frac{mP\dot{\theta}_m}{2\pi}l(\cos\theta)\dot{\theta} + \frac{1}{2}\bar{I}\dot{\theta}^2 - mgl(\cos\theta + 1)$$

위의 Lagrangian에 대하여 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_m} &= \bar{I}_B\dot{\theta}_m + \frac{mPl}{2\pi}(\cos\theta)\dot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_m} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \bar{I}\dot{\theta} + \frac{mP\dot{\theta}_m}{2\pi}l(\cos\theta) \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -\frac{mP\dot{\theta}_m}{2\pi}l(\sin\theta)\dot{\theta} + mgl(\sin\theta) \end{aligned}$$

또한 D 에 대해서는 다음이 성립한다.

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_m} = \frac{bP^2\dot{\theta}_m}{4\pi^2}$$

따라서

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_m} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_m} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_m} = \bar{I}_B\ddot{\theta}_m - \frac{mPl}{2\pi}(\sin\theta)\dot{\theta}^2 + \frac{mPl}{2\pi}(\cos\theta)\ddot{\theta} + \frac{bP^2\dot{\theta}_m}{4\pi^2} = T \quad (2.40)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = \bar{I} \ddot{\theta} + \frac{mPl\ddot{\theta}_m}{2\pi}(\cos \theta) - mgl(\sin \theta) = 0 \quad (2.41)$$

(2.40)의 양변에 $\frac{2\pi}{P}$ 를 곱하면

$$\frac{2\pi}{P} \bar{I}_B \ddot{\theta}_m - ml(\sin \theta) \dot{\theta}^2 + ml(\cos \theta) \ddot{\theta} + b \frac{P \dot{\theta}_m}{2\pi} = \frac{2\pi}{P} T \quad (2.42)$$

$\frac{\theta_m}{2\pi} P = x$ 이므로

$$\frac{\dot{\theta}_m}{2\pi} P = \dot{x}, \quad \frac{\ddot{\theta}_m}{2\pi} P = \ddot{x}$$

이 성립하고 (2.42)는 다음과 같이 나타낼 수 있게 된다.

$$\left(\frac{4\pi^2}{P^2} \right) \bar{I}_B \ddot{x} - ml(\sin \theta) \dot{\theta}^2 + ml(\cos \theta) \ddot{\theta} + b \dot{x} = \left(\frac{2\pi}{P} \right) T \quad (2.43)$$

또한 (2.41)는 다음과 같이 다시 나타낼 수 있다.

$$\bar{I} \ddot{\theta} + ml(\cos \theta) \ddot{x} - mgl(\sin \theta) = 0$$

Remark 13 \bar{I}_B 의 원래 값을 (2.43)에 대입하면 다음과 같이 다시 해석해 볼 수도 있다.

$$\frac{2\pi}{P} \left[I_B + \frac{(M+m)P^2}{4\pi^2} \right] \ddot{\theta}_m - ml(\sin \theta) \dot{\theta}^2 + ml(\cos \theta) \ddot{\theta} + b \frac{P \dot{\theta}_m}{2\pi} = \frac{2\pi}{P} T$$

$T_L = T - I_B \ddot{\theta}_m$ 을 부하 torque라고 하면

$$(M+m) \ddot{x} - ml(\sin \theta) \dot{\theta}^2 + ml(\cos \theta) \ddot{\theta} + b \dot{x} = \frac{2\pi}{P} (T - I_B \ddot{\theta}_m) = \underbrace{\left(\frac{2\pi}{P} \right) T_L}_{= F}$$

즉 이전의 모델링에서 사용했던 힘 F 는 다른아닌 부하 torque T_L 에 의해 발생하는 직선방향 추진력이다.

torque T 를 전압 V 로 나타낸 식을 유도해 보자.

$$T = K_m i_m = \frac{K_m}{R_m} V - \frac{2\pi K_m^2}{P R_m} \dot{x}$$

이므로

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} ml(\cos \theta) & \bar{I} \\ \left(\frac{4\pi^2}{P^2}\right) \bar{I}_B & ml(\cos \theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} mgl(\sin \theta) \\ -b\dot{x} + ml(\sin \theta)\dot{\theta}^2 + \left(\frac{2\pi}{P}\right) T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} mgl(\sin \theta) \\ -\left(b + \frac{4\pi^2 K_m^2}{P^2 R_m}\right) \dot{x} + ml(\sin \theta)\dot{\theta}^2 + \left(\frac{2\pi K_m}{P R_m}\right) V \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(\Phi)} \begin{bmatrix} ml(\cos \theta) & -\bar{I} \\ -\left(\frac{4\pi^2}{P^2}\right) \bar{I}_B & ml(\cos \theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} mgl(\sin \theta) \\ -\left(b + \frac{4\pi^2 K_m^2}{P^2 R_m}\right) \dot{x} + ml(\sin \theta)\dot{\theta}^2 + \left(\frac{2\pi K_m}{P R_m}\right) V \end{bmatrix}$$

따라서

$$\ddot{x} = \frac{m^2 l^2 g(\sin \theta)(\cos \theta) - \bar{I} \left[-\left(b + \frac{4\pi^2 K_m^2}{P^2 R_m}\right) \dot{x} + ml(\sin \theta)\dot{\theta}^2 + \left(\frac{2\pi K_m}{P R_m}\right) V \right]}{\det(\Phi)} \quad (2.44)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{-\left(\frac{4\pi^2}{P^2}\right) \bar{I}_B mgl(\sin \theta) + ml(\cos \theta) \left[-\left(b + \frac{4\pi^2 K_m^2}{P^2 R_m}\right) \dot{x} + ml(\sin \theta)\dot{\theta}^2 + \left(\frac{2\pi K_m}{P R_m}\right) V \right]}{\det(\Phi)} \quad (2.45)$$

여기서

$$\det(\Phi) = (ml \cos \theta)^2 - \left(\frac{4\pi^2}{P^2}\right) \bar{I}_B \bar{I}$$

다음과 같이 정의해보자.

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= m^2 l^2 g(\sin \theta)(\cos \theta) \\ \Lambda_2 &= \bar{I} \\ \Lambda_3 &= -\left(b + \frac{4\pi^2 K_m^2}{P^2 R_m}\right) \dot{x} + ml(\sin \theta)\dot{\theta}^2 \\ \Lambda_4 &= \frac{2\pi K_m}{P R_m} \end{aligned}$$

cart의 고속도 \ddot{x} 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\ddot{x} = \frac{\Lambda_1 - \Lambda_2(\Lambda_3 + \Lambda_4 V)}{\det \Phi}$$

이로부터 가속도 \ddot{x} 와 전압과의 관계를 구하면

$$V = \frac{\det(\Phi)\ddot{x} - \Lambda_1 + \Lambda_2\Lambda_3}{-\Lambda_2\Lambda_4}$$

선형모델

$\theta \approx 0$ 이면 다음과 같이 근사화가 가능하다.

$$\sin \theta \approx \theta, \quad \cos \theta \approx 1, \quad \theta \dot{\theta}^2 \approx 0$$

따라서 (2.44)와 (2.45)는 다음과 같이 근사화된다.

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{m^2 l^2 g \theta + \bar{I} \left(b + \frac{4\pi^2 K_m^2}{P^2 R_m} \right) \dot{x} - \bar{I} \left(\frac{2\pi K_m}{P R_m} \right) V}{\det(\Phi)} \\ \ddot{\theta} &= \frac{- \left(\frac{4\pi^2}{P^2} \right) \bar{I}_B m g l \theta - m l \left(b + \frac{4\pi^2 K_m^2}{P^2 R_m} \right) \dot{x} + m l \left(\frac{2\pi K_m}{P R_m} \right) V}{\det(\Phi)} \end{aligned}$$

여기서

$$\det(\Phi) = (ml)^2 - \left(\frac{4\pi^2}{P^2} \right) \bar{I}_B \bar{I}$$

상태변수를 $x_1 = x$, $x_2 = \theta$, $x_3 = \dot{x}$, $x_4 = \dot{\theta}$ 라고 하면

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & A_{32} & A_{33} & 0 \\ 0 & A_{42} & A_{43} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix} V$$

여기서

$$\begin{aligned} A_{32} &= \frac{m^2 l^2 g}{\det(\Phi)}, \quad A_{33} = \frac{\bar{I} \left(b + \frac{4\pi^2 K_m^2}{P^2 R_m} \right)}{\det(\Phi)}, \quad A_{42} = \frac{- \left(\frac{4\pi^2}{P^2} \right) \bar{I}_B m g l}{\det(\Phi)}, \quad A_{43} = \frac{- m l \left(b + \frac{4\pi^2 K_m^2}{P^2 R_m} \right)}{\det(\Phi)} \\ B_3 &= \frac{- \bar{I} \left(\frac{2\pi K_m}{P R_m} \right)}{\det(\Phi)}, \quad B_4 = \frac{m l \left(\frac{2\pi K_m}{P R_m} \right)}{\det(\Phi)} \end{aligned}$$

6.4 Parameter 측정

기구부, ball screw, 그리고 모터의 parameter 측정을 어떻게 수행하는지를 살펴보자. 이에 앞서 Pasco에서 판매하는 CI-6537 Force Sensor의 사용법을 살펴보자. CI-6537은 ± 12 [V]의 전압원을

사용하여 힘을 측정하는 sensor이다. ± 50 [N] 까지의 힘을 측정할 수 있으며 data sheet에 따르면 ± 8 [V]가 ± 50 [N]에 해당된다. 질량이 m [Kg]인 물체를 force sensor를 이용하여 계량하게 되면

$$\text{측정된 전압} = \frac{8}{50}mg \text{ [V]}$$

의 관계식이 성립한다. 실제로 이 공식이 성립하는지를 알아보기 위해 2.228 [Kg]의 금속을 force sensor를 이용하여 계측하여 보았다. data sheet에 의해 예상되는 측정전압 값은

$$\text{예상 측정 전압} = \frac{8}{50} \times 2.228 \times 9.8 = 3.49 \text{ [V]}$$

하지만 실제 측정된 값은 2.54 [V] 였다. 즉 data sheet에 있는 값을 그대로 믿을 수가 없고 보정을 해 주어야 한다는 말이다. 예상 측정값이 3.49이고 실제 측정값이 2.54이므로 data sheet에 나온 값의 약 73 %만을 전압으로 출력하고 있다는 말이다. 따라서 실제 측정된 값을 이용하여 질량 또는 힘을 계산하기 위해서는 다음과 같은 공식을 사용하여야 한다.

$$\text{질량}(m) = \frac{50}{8 \times 9.8} \times \frac{3.49}{2.54} \times \text{측정된 전압값} = 0.876 \times \text{측정된 전압값}$$

$$\text{힘}(F) = \frac{50}{8} \times \frac{3.49}{2.54} \times \text{측정된 전압값} = 8.59 \times \text{측정된 전압값}$$

먼저 기구부 및 ball screw의 parameter를 측정해 보자. 이와 관련된 parameter 들은 줄자, 저울, force sensor 등을 이용하여 측정할 수 있으며 관성모멘트는 공식을 이용하여 구할 수 있다.

- pendulum의 밑단에서 무게 중심까지의 길이 : $l = 26.5$ [cm]
- pendulum의 질량 : $m = 0.241$ [Kg]

pendulum은 A 부분과 B 부분으로 나뉜다. A 부분은 cylinder 모양이며 B 부분은 직육면체 부분이다. 알루미늄의 밀도가 2.7 [g/cm³]이므로 계산을 통해 질량을 구해보면

$$m_A = \pi \times 0.0061^2 \times 0.595 \times 2700 = 0.1878 \text{ [Kg]} = 187.8 \text{ [g]}$$

$$m_B = 0.02 \times 0.02 \times 0.05 \times 2700 = 0.054 \text{ [Kg]} = 54 \text{ [g]}$$

- cart의 질량 : $M = 1.45$ [Kg]

참고로 cart의 질량은 알루미늄의 밀도, 철의 밀도와 부피 정보를 사용하여 근사적으로 계산한 값이다. 물론 저울을 이용하여 측정한 값이 가장 정확하지만 조립을 해 놓은 상태에서 분해하는 것이 여의치 않아 계산을 통해 질량을 구하였다.

- pendulum의 관성모멘트 : I

pendulum의 무게중심에 대한 관성모멘트를 구해보자. 관성모멘트를 계산하는 공식 (4.10)와 (4.13), 그리고 평행축 정리에 의하면 무게중심에 대한 A 부분의 관성모멘트와 B 부분의 관성모멘트는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} I_A &= m_A \left(\frac{1}{4} r_A^2 + \frac{1}{12} l_A^2 + d_A^2 \right) = 6.585 \times 10^{-3} \\ I_B &= m_B \left(\frac{1}{12} a_A^2 + \frac{1}{12} l_A^2 + d_B^2 \right) = 3.334 \times 10^{-3} \\ I &= I_A + I_B \approx 9.92 \times 10^{-3} \text{ [Nm]} \end{aligned}$$

여기서 사용한 parameter는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} m_A &= 0.1878, m_B = 0.054, r_A = 0.0061, l_A = 0.595, l_B = 0.05, a_B = 0.02 \\ d_A &= 0.0745, d_B = 0.248 \end{aligned}$$

- pendulum의 끝단을 회전축으로 계산한 관성모멘트 : \bar{I}

역시 평행축 정리를 사용할 수 있다. pendulum의 무게중심과 pendulum 끝단의 shaft 중심과의 거리를 d 라 하면 $d = 0.265$ 가 되고

$$\bar{I} = I + md^2 = 26.84 \times 10^{-3} \text{ [Nm]}$$

- ball screw의 효율 : $\eta_1 = 0.9$ (\leftarrow 임의로 정한 값)

- 마찰 계수 μ :

운동시 마찰에 의한 부하는 $F_b = \mu Mg$ 이다. 따라서 F_b 를 측정한 후 Mg 로 나누어 주면 μ 를 구할 수 있다. 일반적으로 $\mu = 0.05 \sim 0.2$ 의 범위를 지닌다. 실제 Force sensor를 이용하여 마찰력을 측정해 보았다. cart가 움직이기 시작할 때 force sensor를 통해 측정된 값은 약 1.5 [V]였다.

$$\mu = \frac{F_b}{Mg} = \frac{1.5 \times 8.59}{1.45 \times 9.8} = 0.907$$

하지만 이 값은 μ 가 일반적으로 가지는 값에 비해 현저히 큰 값이다. ball screw의 예압으로 인해 발생하는 힘으로 생각된다.

다음은 모터 parameter 측정에 관련된 부분이다.

- screw 무게

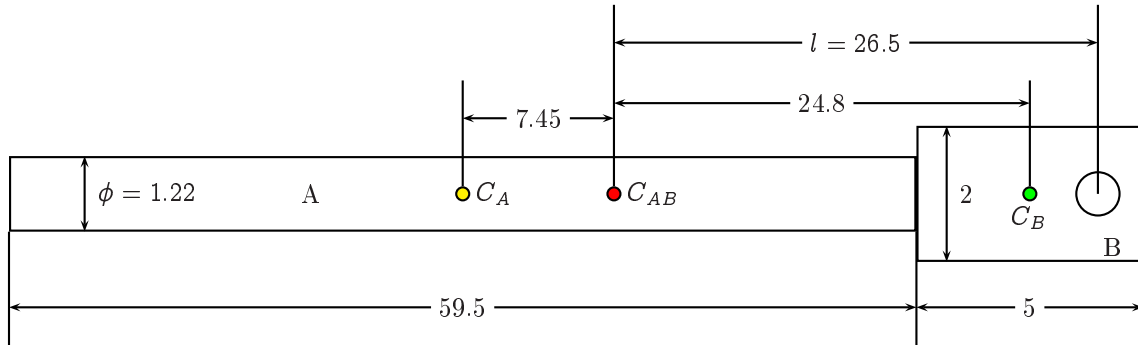


그림 2.14: pendulum의 무게 중심 (단위 : [cm])

force sensor를 screw이 무게를 측정하기 위해 얻은 data이다.

대상체	측정전압	환산 질량	근사질량
screw	1.55[V]	0.9885[kg]	1[kg]

- torque 상수 K_m

토크상수 K_m 의 측정을 위해 사용한 길이가 8 [cm]인 알루미늄 막대를 사용하였으며 force sensor를 이용하여 측정된 data는 다음과 같다.

전류	계측기 전압값	힘(F)	토크($N \cdot m$)
0.5[A]	80[mV]	0.6872[N]	$0.6872 \times 0.08[N \cdot m]$
1[A]	160[mV]	1.3744[N]	$1.3744 \times 0.08[N \cdot m]$
1.5[A]	240[mV]	2.0616[N]	$2.0616 \times 0.08[N \cdot m]$
3[A]	480[mV]	4.1232[N]	$4.1232 \times 0.08[N \cdot m]$

따라서,

$$K_m = 0.11 \quad [N \cdot m/A]$$

알루미늄 막대의 토크를 계산한다면 실제 K_m 는 위의 것보다 약간 클 것으로 생각됨. 따라서

$$K_m = 0.115 \quad [N \cdot m/A]$$

정도로 대략 사용하면 될 것 같음.

- 계자저항 R_m

Multimeter를 이용하여 측정한 계자권선 저항은

$$R_m = 8.1 [\Omega]$$

이였다. 권선저항을 측정하는 또다른 방법으로 다음과 같은 방법을 생각해 볼 수 있다. 권선의 inductance L 를 무시하면

$$V = i_m R_m + K_b \frac{d\theta_m}{dt}$$

모터 축을 고정시켜 회전하지 못하게 한 후, 여러가지 전압을 인가했을 때 흐르는 전류의 양을 측정하였다. 모터가 회전하지 못하므로 2번째 항이 0이 되고, 전류도 큰 변동이 없다는 가정을 하면 결국 $V = i_m R_m$ 이 성립하고 이 관계식에 의하여 전선의 저항을 추정해 볼 수 있는데, 다음과 같이 측정치를 기반으로 하여 저항을 추정해 보았다.

전압	전류	계산된 저항
4 [V]	0.58 [A]	6.9 [Ω]
8 [V]	1.5 [A]	5.3 [Ω]
12 [V]	2.65 [A]	4.5 [Ω]

위의 표를 기반으로 하면 대략 평균값을 취하여 권선저항을 구해보면 약 5.5 [Ω] 정도가 된다. 하지만 이 값은 Multimeter로 측정한 저항값 8.1 [Ω]와는 차이가 있다. Multimeter로 측정한 값을 더 정확한 값으로 보는것이 타당한 것 같다.

- 역기전력 상수 K_b

여러가지 입력전압을 무부하 상태의 모터에 가하여 흐르는 전류의 양과 모터의 회전 속도를 각각 회전계를 이용하여 RPM 형태로 측정하였다. 정상상태에서의 전류 i 는 일정하므로 K_b 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$V = i_m R_m + K_b \frac{d\theta_m}{dt} \rightarrow K_b = \frac{V - i_m R_m}{d\theta_m/dt}$$

계자 권선 저항을 8.1 [Ω]로 가정하고 K_b 를 구해보면,

전압	회전수	각속도	전류	K_b
4 [V]	140 [rpm]	14.7 [rad/s]	0.19 [A]	0.167
8 [V]	490 [rpm]	51.3 [rad/s]	0.19 [A]	0.126
12 [V]	822 [rpm]	86.1 [rad/s]	0.2 [A]	0.12
16 [V]	1154 [rpm]	120.8 [rad/s]	0.2 [A]	0.119
20 [V]	1483 [rpm]	155.3 [rad/s]	0.21 [A]	0.118
24 [V]	1820 [rpm]	190.6 [rad/s]	0.22 [A]	0.116

대략 $K_b = 0.12$ [V/rad/s] 정도로 선정하면 될 것 같다. 이 값은 앞의 실험에서 구한 torque 상수 $K_m = 0.115$ 와도 유사한 값을 가진다. 이것은 $K_m = K_b$ 와 잘 부합되는 결과이다.

7 Swing-up Control

pendulum의 energy를 다음과 같이 정의해보자.

$$E = \frac{1}{2} \bar{I} \dot{\theta}^2 + mgl(\cos \theta - 1)$$

여기서 $\bar{I} = I + ml^2$ 로 pivot에 대한 관성모멘트이다.

$$\frac{dE}{dt} = \bar{I} \dot{\theta} \ddot{\theta} - mgl \dot{\theta} \sin \theta \quad (2.46)$$

(2.7)로부터 (2.46)는

$$\frac{dE}{dt} = -ml \dot{\theta} \cos \theta \ddot{x}$$

\ddot{x} 를 다음과 같이 선정해 보자.

$$\ddot{x} = \text{sat}(k(E - E_0)) \text{sgn}(\dot{\theta} \cos \theta) \quad (2.47)$$

여기서 $k > 0$ 는 설계변수(design parameter)이다. \ddot{x} 가 위와 같을 때

$$\frac{dE}{dt} = -ml \text{sat}(k(E - E_0)) \underbrace{\text{sgn}(\dot{\theta} \cos \theta) \text{sgn}(\dot{\theta} \cos \theta)}_{>0}$$

E_0 는 보통 pendulum이 수직으로 정지해 있는 상태에서의 energy이므로 $E_0 = 0$ 이 된다. 아직 충분히 energy를 공급받지 못하여 수직으로 정지해 있는 것이 아니라 pendulum이 아래에서 흔들리고 있는 상태일 경우에는 $E < E_0$ 가 되어 $\text{sat}(k(E - E_0)) < 0$ 이 된다. 그렇지 않고 pendulum이 빠

른 속도로 회전하여 energy가 $E > E_0$ 가 되면 $\text{sat}(k(E - E_0)) > 0$ 이 된다. 따라서 (2.47)와 같이 가속도를 생성하는 것은 energy가 적을 경우에는 energy를 증가하는 방향으로, energy가 많을 경우에는 energy를 감소하는 방향으로 cart의 가속도를 생성하는 것을 의미한다.

8 Energy control의 SMC 해석

Sliding Mode Control (SMC)에 대하여 간략하게 정리해 본다.

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (2.48)$$

$x \in \mathbf{R}^n$ 는 상태변수, $u \in \mathbf{R}^m$ 는 제어입력, $t \in \mathbf{R}$ 는 시간 변수이다. 제어입력은 다음과 같이 계산된다.

$$u_i = \begin{cases} u_i^+(x, t), & s_i(x) > 0 \\ u_i^-(x, t), & s_i(x) < 0 \end{cases} \quad (2.49)$$

여기서 u_i 는 i 번째 제어입력이고 $s_i(x)$ 는 i 번째 sliding surface이다. 불연속 제어법칙(control law)인 (2.49)를 갖는 시스템 (2.48)은 sliding surface가 시스템의 되먹임 구조(feedback structure)를 변경시키기 때문에 가변구조시스템(variable structure system)이라고 부른다. 시스템의 i 번째 sliding surface에서 sliding motion이 발생할 조건은 다음과 같이 나타내어 진다.

$$s_i(x)\dot{s}_i(x) < 0 \quad (2.50)$$

sliding mode에서 시스템은 다음 방정식을 만족한다.

$$s_i(x) = 0, \quad \dot{s}_i(x) = 0 \quad (2.51)$$

Remark 14 식 (2.50)는 $s_i(x) \neq 0$ 인 지점의 상태는 $s_i(x) = 0$ 인 sliding surface로 수렴하는 것을 의미하고 식 (2.51)는 일단 sliding surface에 상태가 도달하면 밖으로 벗어나지 않는 것을 의미한다.

전절에서 살펴본 energy control은 일종이 sliding mode control로 볼 수 있다. cart의 가속도 \ddot{x} 를 제어변수로 하는 시스템에 대하여 sliding surface s 를 다음과 같이 설정하자.

$$s = \frac{1}{2}\bar{I}\dot{\theta}^2 + mgl(\cos \theta - 1)$$

(2.7)로부터 \dot{s} 는 다음을 만족한다.

$$\dot{s} = \dot{\theta}(\bar{I}\ddot{\theta} - mgl \sin \theta) = -ml\dot{\theta} \cos \theta \ddot{x}$$

Lyapunov 함수를 다음과 같이 선정하자.

$$V = \frac{1}{2}s^2$$

V 의 시간도함수는

$$\frac{dV}{dt} = s\dot{s} = s(-ml\dot{\theta} \cos \theta \ddot{x})$$

\ddot{x} 를 제어입력으로 보았을 때 다음과 같이 \ddot{x} 를 선정해보면

$$\ddot{x} = \text{sat}(ks)\text{sign}(\dot{\theta} \cos \theta)$$

\ddot{x} 를 \dot{s} 에 대입하면

$$\dot{s} = -ml\text{sat}(ks)\text{sign}(\dot{\theta} \cos \theta)\dot{\theta} \cos \theta$$

이로부터 $s = 0$ 이면 $\dot{s} = 0$ 이 성립함을 알 수 있다. 또한 V 의 시간도함수가 다음과 같이 나타남을 볼 수 있다.

$$\frac{dV}{dt} = s\dot{s} = -ml \underbrace{\text{sgn}(\dot{\theta} \cos \theta)\text{sgn}(\dot{\theta} \cos \theta)}_{>0} \underbrace{s \text{ sat}(ks)}_{>0, s \neq 0} < 0, s \neq 0$$

9 Swing-up Control (Quanser 도립진자)

Quanser 사의 도립진자에 대해 swing-up control algorithm을 적용하여 실험하여 얻은 결과는 다음과 같다.

λ 가 비교적 작은 경우에는 중앙에 머무르려는 속성이 작아 track의 넓은 범위를 사용하게 된다. 또한 u_a 도 작은 값을 가지면 급격하게 가속도를 변화시키는 동작은 볼 수 없다.

$u_a = 2, \lambda = 1.7$ 로 하였을 경우 cart는 최초로 기동시켰을 때 부들부들 떠는 모습을 보인다. 이것은 u_a 가 비교적 커서 확실하게 가속도를 줄 수 있고 λ 역시 큰 값이어서 중앙에 계속 머물러려는 속성이 크기 때문으로 분석된다.

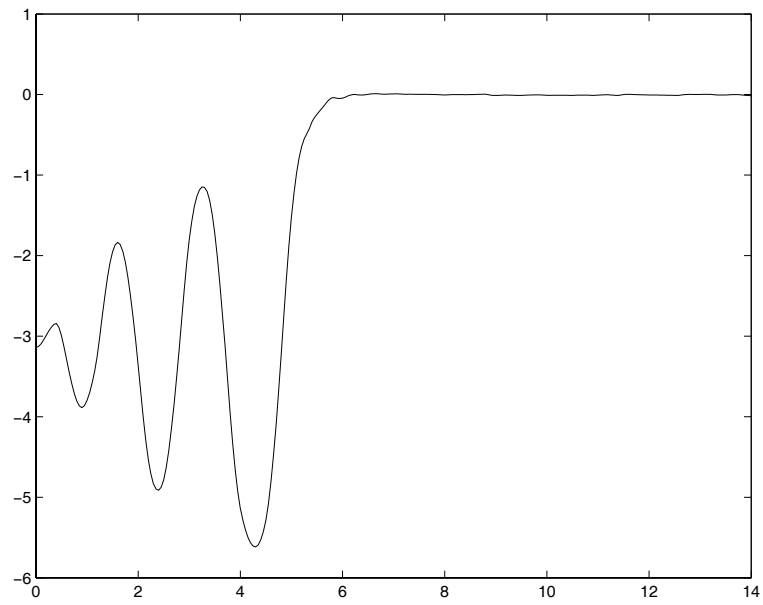


그림 2.15: pendulum angle, θ ($u_a = 0.5, \lambda = 0.6$)

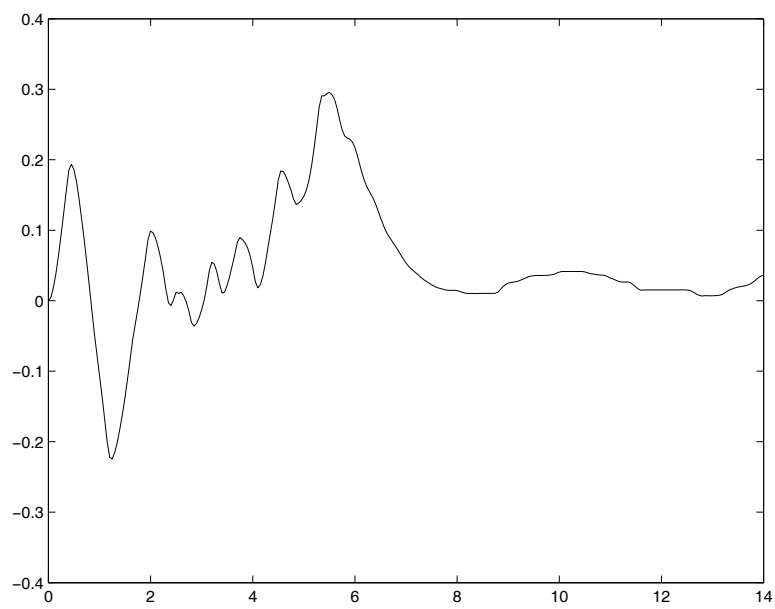


그림 2.16: cart의 변위, x ($u_a = 0.5, \lambda = 0.6$)

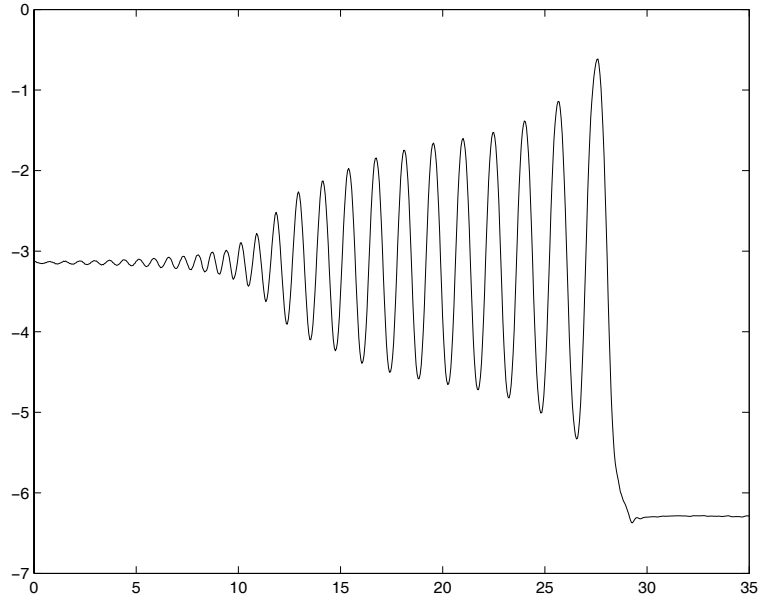


그림 2.17: pendulum angle, θ ($u_a = 2, \lambda = 1.7$)

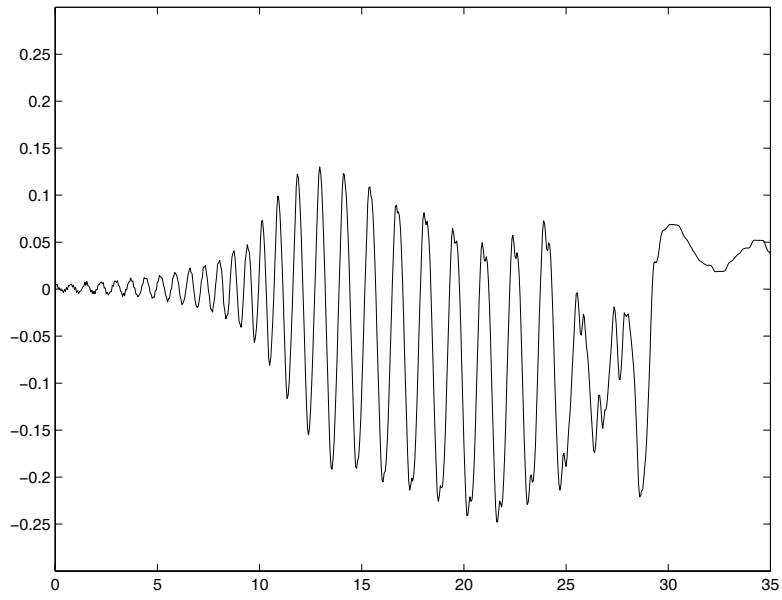


그림 2.18: cart의 변위, x ($u_a = 2, \lambda = 1.7$)